MATHÉMATIQUES | P1 → PSI-P2B

Année 2024/25

Travail de vacances, été 2024

Vincent Rohart

https://vrohart.e-monsite.com/

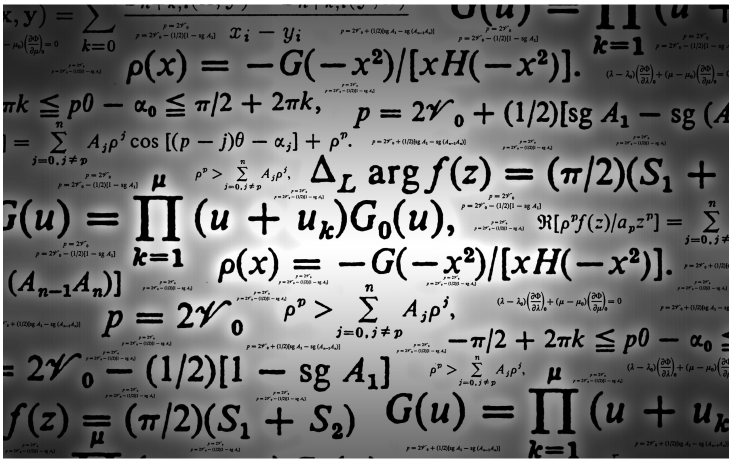
Comment se servir de ce document

Pour bien rédiger en Mathématiques et tenter d'éliminer les mauvaises habitudes, je vous demande de bien étudier ce cours un peu spécial. Il essaie de recenser les erreurs les plus fréquentes concernant la **rédaction**.

Étudier ce cours ne consiste pas seulement à le lire. Vous devez prendre un papier et un crayon, prendre des notes, refaire les exemples, et synthétiser ce qui est exposé.

Quelques exercices sont proposés à la fin : cherchez-les avec soin. Une évaluation est prévue à la rentrée pour tester le sérieux de votre travail.

Pour que l'assimilation se fasse correctement, il est indispensable d'être régulier, et de ne pas tout faire les trois derniers jours des vacances. La régularité et la répétition sont les clés de la réussite, en Mathématiques mais aussi en Musique, en Sport, etc.



I Commençons par le français

Les Mathématiques s'expriment, en France, en français. Soigner la langue française c'est assurer un échange mathématique de qualité avec un interrogateur ou un professeur. C'est aussi favoriser la compréhension précise et sérieuse des notions mathématiques.

S'il on ne maîtrise pas la syntaxe de notre langue, il est impossible de créer en son esprit des idées claires sur des notions mathématiques nouvelles.

De plus, votre future vie d'ingénieur(e) demandera une parfaite maîtrise de la langue (en français et en anglais !) afin de défendre un projet, convaincre une équipe, vous faire comprendre par les différents acteurs qui travaillent avec vous.

I.1 Locutions incorrectes souvent rencontrées

Locutions fautives	Références
Du coup	https://www.academie-francaise.fr/du-coup-au-sens-de-de-ce-fait
Au final	https://www.academie-francaise.fr/au-final
De base(1)	https://www.academie-francaise.fr/de-base
En vrai	https://www.academie-francaise.fr/en-vrai-pour-en-realite
Faire sens	https://www.academie-francaise.fr/faire
Déjà(2)	https://www.dictionnaire-academie.fr/article/A8D0607
On a que	(mésusage uniquement rencontré en mathématiques)

(1) Au sens de « à l'origine ». (2)Au sens de « premièrement ».

• En lieu et place de ~~du coup~~, on emploiera, en s'efforçant de varier :

— donc
— si bien que
— par conséquent
— en conclusion
— ainsi
— par suite
— c'est pourquoi
— dès lors
— aussi
— de ce fait
— finalement
— ...

• **Déjà** est un adverbe de temps. Il ne signifie pas « premièrement ».
✓ **Déjà**, le soleil se levait sur l'horizon.
✓ À peine sortis de P1 et **déjà** plein de travail pour les vacances !
☒ ~~Déjà~~, on sait que la première inclusion est vraie.
✓ Premièrement, on sait que la première inclusion est vraie.

• Certains verbes peuvent s'employer dans une **proposition subordonnée complétive**, c'est-à-dire une proposition qui peut être remplacée par un groupe nominal.

— Je vois que le chien court ≡ Je vois la course du chien.
— On sait que tu es beau ≡ On sait ta beauté.

Le verbe *avoir* **ne s'emploie pas** dans une construction complétive :
☒ ~~On a que~~ le chien a mangé ses croquettes.
☒ ~~On a que~~ f est une fonction paire.
✓ On a la parité de f. (Correcte mais cf. remarque ci-dessous).
✓✓ On sait que la fonction f est paire. (Mieux).

Le verbe *avoir* peut en revanche s'employer dans une **proposition subordonnée relative**, même si celle-ci est lourde et peut avantageusement être remplacée.

— On a un chien qui est gentil ≡ On a un gentil chien.
— On a un réel x qui est qui positif ≡ On a un réel positif x.

Cependant, la locution « on a », bien que correcte, est souvent inélégante d'un point de vue syntaxique. L'enlever purement et simplement est souvent une solution simple.
≈ ☒ On sait que $x^2 = 1$ et que $x > 0$, donc ~~on a~~ $x = 1$.
✓ On sait que $x^2 = 1$ et que $x > 0$, donc $x = 1$.

I.2 Orthographes courantes

Orthographes fautives	Orthographes correctes
~~Quelque soit~~	**Quel que soit / Quelle que soit**
~~Quelques soient~~	**Quels que soient / Quelles que soient**
Une fonction ~~tel que~~	Une fonction **telle que**
Des réels ~~tel que~~	Des réels **tels que**
~~Étant donnés~~ des réels	**Étant donné** des réels*
~~Étant données~~ des droites	**Étant donné** des droites*
On ~~résoud~~ / Je ~~résouds~~	On **résout** / Je **résous**
~~Si il~~ (hiatus)	**S'il**
~~Reccurence~~	**Récurrence**
Un ~~Interval~~	Un **Intervalle**
~~Précédament~~	**Précédemment**
~~Polynome~~	**Polynôme**
~~Polynômial(e)~~	**Polynomial(e)**

* Mais on écrit : deux réels étant donnés, deux droites étant données.

• On retient : « quel que soit » s'écrit toujours en **trois** mots (masc./fém. — sing./plur.).

• Les ACCENTS (´, `, ˆ, ¨) dans la langue française sont obligatoires et font partie de l'orthographe d'un mot. Ne pas les mettre, par flemme ou par fantaisie, constitue une faute entière.

Exemples.

☒ Une fonction ~~derivable~~ (se prononce `[deurivabl']`).

✓ Une fonction **dérivable**.

☒ Un ~~element~~ (se prononce `[euleuman]`) de $\mathbb{R}$ s'appelle un nombre réel.

✓ Un **élément** de $\mathbb{R}$ s'appelle un nombre réel.

I.3 La ponctuation

• Le deux-points « : » est un signe de ponctuation d'usage courant. En aucun cas il ne peut séparer
— un verbe de son complément.
— une conjonction de subordination et la proposition qu'il subordonne.
— un adjectif de son antécédent.
— une conjonction de coordination et le terme qu'il coordonne.

Exemples.

☒ [...] Pythagore a dit que ~~:~~ dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse égale [1] la somme des carrés des autres côtés.

✓ [...] Pythagore a dit que dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse égale la somme des carrés des autres côtés.

✓ [...] Pythagore a dit que dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal [2] à la somme des carrés des autres côtés.

☒ [...] ainsi, il vient [3] ~~:~~ $x = 0$.

✓ [...] ainsi, il vient $x = 0$.

1. Du verbe *égaler*, 3^{e} personne du singulier.
2. Adjectif masculin singulier dont l'antécédent est *le carré*.
3. « Il vient que », tout comme « on a que », est incorrect.

☒ On sait que ~~:~~ f est paire.

✓ On sait que f est paire.

☒ On a montré que ~~:~~ x ~~est~~ positif.

✓ On a montré que x était positif (**concordance des temps**).

☒ Soit f définie par ~~:~~

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2.$$

✓ Soit f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2.$$

☒ Soit f une fonction telle que ~~:~~ $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$

✓ Soit f une fonction telle que $f(x) = 0$ pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+$.

☒ On sait que $x^2 = 9$. Or ~~:~~ $x \leqslant 0$, donc ~~:~~ $x = -3$.

✓ On sait que $x^2 = 9$. Or $x \leqslant 0$, donc $x = -3$.

- Après « soit », qui sert à introduire un nouvel objet, on met un point.

Exemple.

☒ Soit ~~$n \in \mathbb{N}$, nous~~ affirmons que $2^n + 1$ n'est pas toujours un multiple de 3.

✓ Soit $n \in \mathbb{N}$. Nous affirmons que $2^n + 1$ n'est pas toujours un multiple de 3.

L'erreur de syntaxe commise dans la phrase ci-dessus s'appelle une *anacoluthe*[4] : c'est une rupture syntaxique.

I.4 Les lettres en usage

En plus des 24 lettres de l'alphabet grec...

$\mathrm{A}\ \alpha$	$\mathrm{B}\ \beta$	$\Gamma\ \gamma$	$\Delta\ \delta$	$\mathrm{E}\ \varepsilon$	$\mathrm{Z}\ \zeta$	$\mathrm{H}\ \eta$	$\Theta\ \vartheta$
alpha	bêta	gamma	delta	epsilon	zêta	êta	thêta
$\mathrm{I}\ \iota$	$\mathrm{K}\ \varkappa$	$\Lambda\ \lambda$	$\mathrm{M}\ \mu$	$\mathrm{N}\ \nu$	$\Xi\ \xi$	$\mathrm{O}\ o$	$\Pi\ \pi$
iota	kappa	lambda	mu	nu	ksi	omicron	pi
$\mathrm{P}\ \rho$	$\Sigma\ \sigma$	$\mathrm{T}\ \tau$	$\Upsilon\ \upsilon$	$\Phi\ \varphi$	$\mathrm{X}\ \chi$	$\Psi\ \psi$	$\Omega\ \omega$
rhô	sigma	tau	upsilon	phi	khi	psi	oméga

... vous devez connaître (savoir lire et savoir écrire) les 26 lettres cursives de l'alphabet français.

$\mathscr{A}$ $\mathscr{B}$ $\mathscr{C}$ $\mathscr{D}$ $\mathscr{E}$ $\mathscr{F}$ $\mathscr{G}$ $\mathscr{H}$ $\mathscr{I}$ $\mathscr{J}$ $\mathscr{K}$ $\mathscr{L}$ $\mathscr{M}$

$\mathscr{N}$ $\mathscr{O}$ $\mathscr{P}$ $\mathscr{Q}$ $\mathscr{R}$ $\mathscr{S}$ $\mathscr{T}$ $\mathscr{U}$ $\mathscr{V}$ $\mathscr{W}$ $\mathscr{X}$ $\mathscr{Y}$ $\mathscr{Z}$

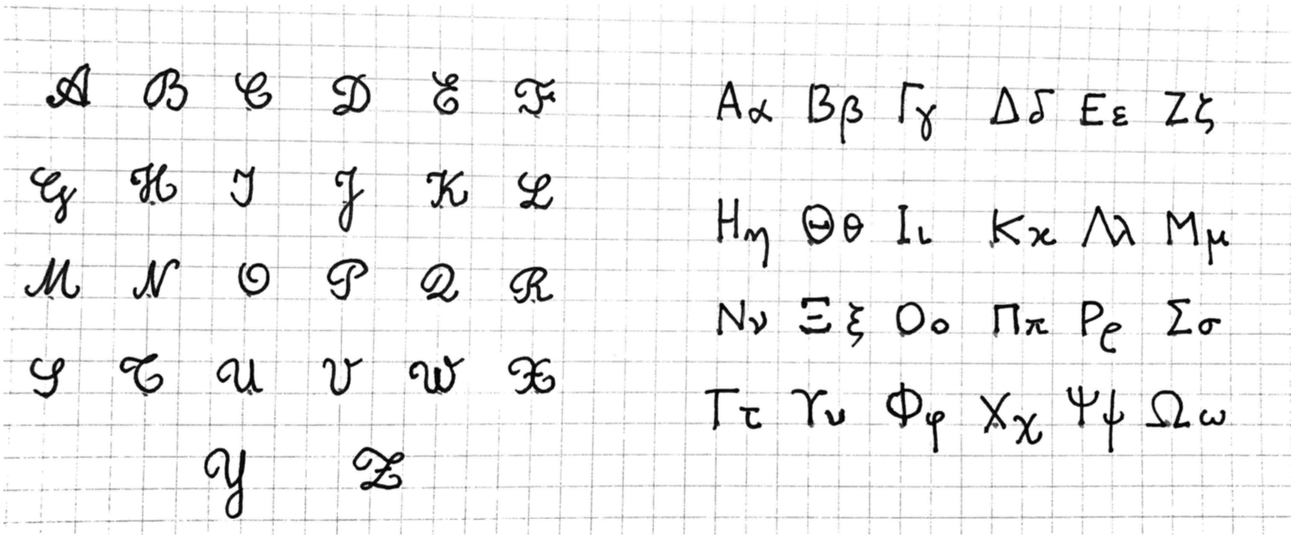
Exemple 1. Soit $\mathscr{F}$ un sous-espace affine de direction F.

Exemple 2. On note $\mathscr{V}(x, y, z)$ la matrice de Vandermonde $\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{V}(x, y, z)$ son déterminant. On montre que $\mathrm{V}(x, y, z) = (x - y)(x - z)(y - z)$. Ainsi, $\mathscr{V}(x, y, z)$ est inversible si et seulement si x, y, z sont deux à deux distincts.

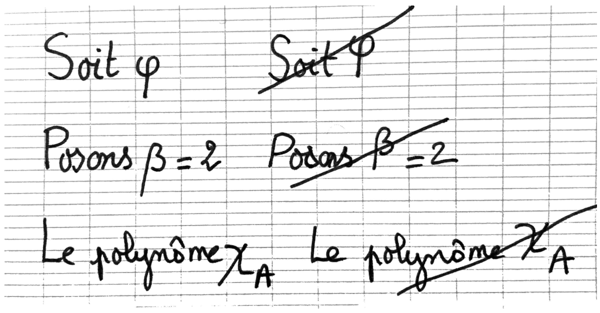
4. Même étymologie que *acolyte* : c'est une personne qui nous suit (ἀκολουθέω = accompagner, suivre).

On distingue aussi les lettres grasses : $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, ... que l'on écrit fréquemment [5] $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}$, ... Le 1 gras, $\mathbb{1}$, sert à désigner les fonctions indicatrices. Par exemple, $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$ est la fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{R}_+, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$



On remarque la position des lettres minuscules $\beta, \gamma, \eta, \mu, \rho, \varphi, \psi$ par rapport à la ligne :



Enfin, certaines lettres rares sont utilisées : les gothiques ($\mathfrak{A}, \mathfrak{c}, \mathfrak{Im}, \mathfrak{Re}, \mathfrak{S}$), une lettre hébraïque ($\aleph$), et une lettre russe (Ш).

I.5 Énoncer une définition

Il y a plusieurs façons d'énoncer une définition en Mathématiques. Les modèles suivants représentent l'écrasante majorité des cas rencontrés dans un cours : entraînez-vous à les reproduire.

On dit que [truc] est un [machin] quand [blabla]
On dit que [truc] est [machinable] lorsque [blabla]
Un [truc] est dit [machinable] lorsque [blabla]
On appelle [machin] tout [truc] qui vérifie [blabla]
On appelle [truc machinable] tout [truc] tel que [blabla]

Exemples.

☒ Une matrice nilpotente ~~c'est quand on a~~ $\mathrm{M}^k = 0$.

5. On n'a pas le choix en manuscrit !

☒ Une matrice nilpotente, ~~c'est par exemple quand~~ [...]
☒ ~~Pour moi~~, une matrice nilpotente ~~c'est quand~~ une puissance est nulle.
☒ C'est $\mathrm{M}^k = 0$.

✓ Une matrice carrée est dite nilpotente quand une de ses puissances est nulle.

✓ On dit qu'une matrice carrée est nilpotente lorsque l'une de ses puissances est nulle.

✓ On appelle matrice nilpotente toute matrice carrée $\boxed{\text{dont}}$ une puissance est nulle.

✓ Soit M une matrice carrée. On dit que M est nilpotente s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{M}^k = 0$.

On distingue trois notions.
— La **définition** d'un objet : une phrase qui explique précisément et sans ambiguïté ce qu'est ledit [6] objet.
— Le **nom** de l'objet : c'est le mot qui permet de l'appeler. En aucun cas ce mot ne définit l'objet !
— La **notation** de l'objet : c'est le symbole qui désigne l'objet.

Exemple. Le conjugué d'un nombre complexe z.
— **définition** : c'est le nombre complexe qui a la même partie réelle que z, mais une partie imaginaire opposée à celle de z.
— **nom** : ce nombre est appelé conjugué de z.
— **notation** : on note ce nombre $\overline{z}$.

✓ **Définition correcte.** On appelle conjugué d'un nombre complexe z, le nombre complexe noté $\overline{z}$ égal à $\mathfrak{Re}(z) - \mathrm{i}\mathfrak{Im}(z)$.

☒ **Définition incorrecte.** Le conjugué de z, c'est $\overline{z}$.

→ Qui est ce z au début de la phrase ? On doit deviner que c'est un nombre complexe ? Observer la différence avec la définition correcte.
→ On sait seulement comment on note le conjugué de z. On ne sait toujours pas comment il est défini.

☒ **Définition incorrecte.** Le conjugué de z, c'est $\overline{z} = \mathfrak{Re}(z) - \mathrm{i}\mathfrak{Im}(z)$.

→ Qui est ce z au début de la phrase ?
→ Où est la locution « On appelle » ou « On dit que » quasiment obligatoire dans une définition ?

I.6 Énoncer un théorème

Étymologies grecques (sachez lire un mot grec : il suffit de bien connaître l'alphabet !)
— τὸ θεώρημα : ce qu'on peut contempler, d'où spectacle, objet de méditation, d'où règle, principe.
Du verbe θεωρέω : contempler (même racine que θέατρον : le théâtre).

— ἡ θέσις : action de poser, d'instituer. D'où affirmation.
Du verbe τίθημι : poser.

— ὑπό : en dessous. Ainsi, hypothèse : ce qu'on pose en dessous, pour servir de fondement.

— τὸ λῆμμα : Tout ce qu'on prend ou reçoit, d'où l'une des prémisses d'un syllogisme, et par extension l'un des arguments d'une preuve.
Du verbe λαμβάνω : prendre.

Étymologies latines
— *probare* : essayer, examiner, vérifier, reconnaître. D'où preuve.

6. En un seul mot, tout comme *lequel*.

— *corolla* : petite couronne. D'où énoncé qui tourne autour du théorème précédent, donc une conséquence.

Un **théorème** est composé de trois parties :

1. La présentation des objets : on utilise « soit » (invariable) dans le sens de « considérons ». **Exemple.** Soit ABC un triangle.
2. Les hypothèses que l'on fait sur lesdits objets : on utilise « si » ou « supposons que ». **Exemple.** Si ABC est rectangle en A.
3. La ou les conclusion(s) : introduite(s) par « alors », ou tout autre mot conclusif. **Exemple.** Alors $\mathrm{BC}^2 = \mathrm{BA}^2 + \mathrm{AC}^2$.

Parfois le théorème a un **nom** : ici le théorème de Pythagore.

Pour utiliser un théorème lors d'un exercice on doit : s'assurer que les objets concernés vérifient les hypothèses dudit théorème, et enfin, et seulement après ces vérifications, énoncer la conclusion en invoquant le nom du théorème s'il en a un à l'aide de « par », « grâce à » ou « en vertu de ».

Exemple. Énoncer la formule de Taylor avec reste intégral.

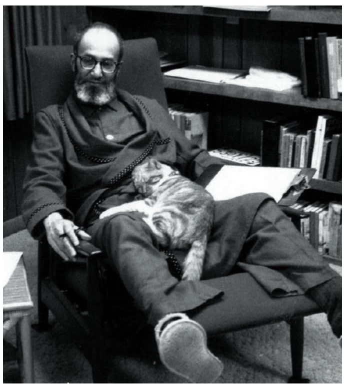
☒ $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt.$

→ Qui sont n, f, I, a, x ? (Les lettres k et t étant ici muettes, elles ne doivent pas être présentées).
→ La fonction f est-elle quelconque ? Doit-on deviner que I est un intervalle parce qu'il s'appelle I, ou que « habituellement » une fonction est définie sur un intervalle ?

✓ Soit I un intervalle de longueur non nulle, $a \in \mathrm{I}$, $n \in \mathbb{N}$ et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction. Si f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I, alors

$$\forall x \in \mathrm{I},\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt.$$

On ferme aujourd'hui une démonstration par le symbole □ ou ■ appelé *halmos*, du nom du mathématicien Paul Halmos (1916-2006).



C.Q.F.D. (ce qu'il fallait démontrer) est franchement démodé.

Q.E.D. (*quod erat demonstrandum* est surtout utilisé aux États-Unis, mais pas en France. C'est la traduction latine de la locution grecque originelle ci-dessous.

O.E.Δ. (ὅπερ ἔδει δεῖξαι) était initialement écrit la fin des démonstrations dans les Éléments d'Euclide (IIIe siècle av. J.-C.).

I.7 Posons, notons, soit : quelle différence ?

☒ ~~On note $x = 2$~~.	✓ On pose $x = 2$.
☒ ~~On note $x = 2$~~.	✓ On note x le nombre 2.
☒ ~~On pose x un réel.~~	✓ Soit x un réel. / Considérons un réel x.
☒ ~~On pose $x^2 = 2$~~.	✓ Soit x un nombre tel que $x^2 = 2$.

Usage toléré. Soit $z = a + bi$ un nombre complexe, avec a et b dans $\mathbb{R}$.

Syntaxe correcte (mais un peu longue). Soit z un nombre complexe. **On dispose de** a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $z = a + bi$.

PIÈGE !
Il faut se méfier de la préposition « avec », son usage est bien trop vague. Mieux vaut donc l'éviter.

Exemple.
☒ Soit $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ avec $a \wedge b = 1$. Alors $au + bv = 1$ avec $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$.
✓ Soit $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$. Si $a \wedge b = 1$, alors il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $au + bv = 1$.

On $\boxed{\text{pose}}$ une égalité lors d'une affectation : Python note `=` l'affectation, et `==` l'égalité. L'affectation est parfois notée `:=` dans certains langages, pour marquer sa dissymétrie : dire « posons $2 = x$ » n'a aucun sens (cf. capture d'écran après).

On $\boxed{\text{note}}$ par une lettre un nouvel objet.

Le verbe $\boxed{\text{soit}}$[7] utilisé dans ce cadre devient une locution adverbiale (donc est invariable, même si l'usage tend à l'accorder en nombre) et sert à présenter un nouvel objet ou à créer un nom pour nouvel objet : il est impossible d'écrire ~~soit 2~~ ou ~~soit x^2~~, exactement comme en `Python` : cf. capture ci-dessous.

```
In [1]: x=3

In [2]: y**2=3
  File "<ipython-input-2-492933ff4567>", line 1
    y**2=3
    ^
SyntaxError: cannot assign to operator


In [3]: 2=x
  File "<ipython-input-3-e5959d3d323b>", line 1
    2=x
    ^
SyntaxError: cannot assign to literal
```

Dire « soit x un réel » est tout à fait équivalent à dire « considérons un réel x » (sous-entendu : il n'a jamais été présenté avant, et la lettre x n'est pas déjà prise).

PIÈGE !
En aucun cas « soit » est équivalent à « pour tout ».

Exemple.
— Soit c un chat (identique à : considérons un chat, que je décide d'appeler c). J'adopte c.
— Pour tout chat c, j'adopte c.

Dans la première phrase, je n'ai adopté qu'un seul chat : celui que j'ai appelé c. Dans la deuxième phrase j'ai adopté tous les chats qui existaient.

Rappel. Après « soit » suivi du nom de l'objet considéré, on doit mettre un point. La phrase « soit c un chat, j'adopte c » est incorrecte[8].

7. Encore une fois, c'est la traduction littérale du grec (ancien) : ἔστω (impératif présent du verbe être, 3^e personne du singulier). Mais l'impératif français n'a pas de 3^e personne ; on pallie ce manque en employant le subjonctif.
8. C'est une anacoluthe, c'est-à-dire une rupture syntaxique.

II L'usage des symboles logiques

II.1 Le symbole $=$

On l'a déjà signalé, il existe un même symbole $=$ pour deux significations.

— L'affectation (notée `=` en Python, mais notée `:=` dans d'autres langages).

Exemple. Posons $x = 2$.

— Le test booléen (noté `==` en Python).

Exemple. Si x est un réel tel que $x + 1 = 2$, alors $x = 2$.

RÈGLE ABSOLUE
Quand on écrit « A $=$ B » on s'oblige à prendre le temps de se demander si A et B sont des objets mathématiques de même type.

Types d'objets mathématiques : ensembles[9], nombres, n-uplets de nombres, matrices, vecteurs, fonctions, matrices, polynômes, ...

Rares exceptions.

- L'écriture « $u_n = \underset{n\to\infty}{o}(v_n)$ » n'est pas une véritable égalité. L'écriture correcte théorique est

$$u \in o(v)$$

pour dire que la suite u appartient à l'ensemble des suites négligeables devant la suite v.

- En Probabilités, si $\mathrm{X} : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire et si $a \in \mathbb{R}$, on note $(\mathrm{X} = a)$ l'ensemble des antécédents de a par X, c'est-à-dire $\{\omega \in \Omega \mid \mathrm{X}(\omega) = a\}$. On constate que l'égalité entre X et a n'est pas correcte car elle met en jeu des objets de natures différentes.

II.2 Les connecteurs logiques

On rappelle les connecteurs usuels de la Logique classique.

$\neg$: négation

$\vee$: disjonction (ou)	$\wedge$: conjonction (et)
$\Longrightarrow$: implication (si...alors...)	$\Longleftrightarrow$: équivalence (ssi)

Ce **ne sont pas** des abréviations. Le symbole $\Longrightarrow$ **n'est pas un** une marque de début de paragraphe.

Le symbole $\Longrightarrow$ **ne veut pas dire** « donc ». Les Américains utilisent le symbole $\therefore$ comme connecteur « donc ». Exemple :

— $\mathscr{A}$: « j'ai gagné au loto »,

— $\mathscr{B}$: « je suis riche ».

Quelle est la différence entre $\mathscr{A} \Longrightarrow \mathscr{B}$ et $\mathscr{A} \therefore \mathscr{B}$?

En français, il est possible d'écrire « j'aime les maths, la musique et le sport ». En Mathématiques[10] **on est obligé de répéter** : « (j'aime les maths) et (j'aime la musique) et (j'aime le sport) ».

9. En théorie, (presque) tout objet mathématique est un ensemble : les nombres, par exemple, sont des ensembles particuliers.

10. Comme en grec, en hébreu, en japonais...

II.3 Les lettres muettes

On rencontre des lettres muettes

— dans les quantificateurs : $[\forall x \in \mathrm{E},\ \mathscr{A}(x)] \equiv [\forall y \in \mathrm{E},\ \mathscr{A}(y)]$.

Exemple. L'assertion $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0$ peut se lire sans prononcer la lettre x : *le carré d'un nombre réel est toujours positif ou nul.* C'est donc que la lettre x est muette.

— dans les intégrales : $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

— Dans les limites : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{k\to\infty} u_k$.

C'est pour cela que l'on parle de la limite de la suite u, tout court, notée $\lim u$.

— dans les fonctions : $(x \mapsto x^2) = (y \mapsto y^2)$

— dans les opérateurs $\sum$, $\prod$, $\bigcup$, $\bigcap$ etc. : $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \sum\limits_{i=0}^{n} u_i$.

Il n'a donc **aucun sens** d'écrire

— ☒ $\cancel{\forall x \in \mathbb{R}}$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$. Sinon, on pourrait écrire (en prenant $x = 5$), « $\lim\limits_{5\to 1} f(5) = 0$ » (?!)

— ☒ $\cancel{\forall t \in [0,1]}$, $\int_0^1 t^2\mathrm{d}t = \frac{1}{3}$. Sinon, on pourrait écrire (en prenant $t = 1$), « $\int_0^1 1^2\mathrm{d}1 = \frac{1}{3}$ » (?!)

— etc.

II.4 Les quantificateurs

Le Calcul des prédicats utilisé en logique mathématique utilise deux symboles (même si un seul suffirait en théorie) appelés *quantificateurs*, que vous connaissez déjà très bien. Nous rappelons ici les quelques règles régissant leur usage.

Rappelons au passage que l'assemblage « $\forall x \in \mathrm{E}$ » est déjà une abréviation. L'écriture théoriquement correcte de

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0$$

est

$$(\forall x)(x \in \mathbb{R} \Longrightarrow x^2 \geqslant 0).$$

On comprend bien que l'on s'autorisera un minimum de souplesse pour que les assertions mathématiques restent lisibles.

Exemple. La définition de la convergence d'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers un réel ℓ s'écrit

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant \mathrm{N},\ |u_n - \ell| \leqslant \ell.$$

La syntaxe théoriquement correcte est cependant

$$(\forall \varepsilon)\Big(\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \Longrightarrow \Big[(\exists \mathrm{N})\big(\mathrm{N} \in \mathbb{N} \Longrightarrow [(\forall n) \Longrightarrow ([n \in \mathbb{N} \wedge n \geqslant \mathrm{N}] \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon)]\big)\Big]\Big).$$

Règle n° 1

Toute variable se quantifie.
Ce n'est pas parce qu'une lettre s'appelle n qu'il est sous-entendu que c'est un entier quelconque.

Exemple.
☒ Soit $f(x) = \ln(x)$.
✓ Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \ln(x)$.

☒ Un entier impair est un entier de la forme $2p + 1$.
✓ Un entier impair est un entier n tel qu'il existe un entier p tel que $= 2p + 1$.
✓ Un entier impair est un entier de la forme $2p + 1$, où $p \in \mathbb{N}$.

☒ Pour montrer que la suite u est croissante on montre que $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.
✓ Pour montrer que la suite u est croissante on montre que $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ pour tout entier n.
✓ Pour montrer que la suite u est croissante on montre que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.

Règle n° 2

Les symboles $\forall$ et $\exists$ **ne sont pas des abréviations** à employer dans des phrases non mathématiques. Ils s'utilisent dans des formules, en général dans des définitions ou des théorèmes, souvent centrées et **toujours sur une seule ligne** : on **ne coupe pas** une quantification sur deux lignes.

Exemple.
☒ On sait que $\exists x \in \mathbb{C}$ ~~tel que~~ $x^2 = -1$
✓ On sait qu'il existe x dans $\mathbb{C}$ tel que $x^2 = -1$.
✓ On sait qu'il existe un nombre complexe dont le carré vaut -1.
✓ On sait que $\exists x \in \mathbb{C},\ x^2 = -1$.
☒ On sait que $\cancel{\forall x \in \mathbb{R}}$,

$$x^2 \geqslant 0.$$

✓ On sait que $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 0$.
✓ On sait que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0.$$

Règle n° 3

Les symboles $\forall$ et $\exists$ se placent toujours à **gauche** de l'assertion sur laquelle ils portent. Il y a cependant une tolérance en cas d'un seul quantificateur $\forall$.

Exemple.
☒ On sait que $\cancel{x^2 \geqslant 0,\ \forall x \in \mathbb{R}}$ (même si toléré).
✓ On sait que $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 0$.
✓ On sait que $x^2 \geqslant 0$ pour tout réel x.

Règle n° 4

Les lettres qui suivent un quantificateur sont **muettes** : il n'a pas de sens de les utiliser en dehors de la quantification.

Exemple.
☒ On sait que $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0$, ~~donc~~ $\cancel{x^2 + 1 \geqslant 1}$.
✓ On sait que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0.$$

Si $x \in \mathbb{R}$, on peut donc dire que $x^2 + 1 \geqslant 0$.

☒ On sait que $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 = 2$ ~~et même que~~ $\cancel{x = \pm\sqrt{2}.}$
✓ On sait que

$$\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 = 2.$$

Si x est un réel tel que $x^2 = 2$, alors $x = \pm\sqrt{2}$.

Règle n° 5

La quantification $\exists$ peut se traduire en français autrement que par « il existe ».

La quantification $\forall$ peut se traduire en français autrement que par « pour tout » ou « quel que soit ».

Exemple. L'assertion $\exists z \in \mathbb{C},\ z^2 = -1$ peut se traduire par
- L'équation $z^2 = -1$ (d'inconnue z) **admet** au moins une solution dans $\mathbb{C}$.
- Dans $\mathbb{C}$, -1 **possède** au moins une racine carrée.
- **On peut trouver** des nombres complexes dont le carré vaut -1.
- **Il est possible**, dans $\mathbb{C}$, **d'écrire** -1 comme un carré.

Exemple. L'assertion $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0$ peut se traduire par
- Le carré de **n'importe quel** réel est positif ou nul.
- Le carré d'un réel est **toujours** positif ou nul.
- Dans $\mathbb{R}$, **on ne peut pas trouver** de carré strictement négatif.

Règle n° 6

Les écritures $\forall x^2$, $\exists f(x)$ ou $\exists 2 \in \mathbb{N}$ sont incorrectes. On quantifie une lettre libre, pas une expression.
De plus, l'écriture $\nexists x \in \mathrm{E}$ est incorrecte.

Exception pour les n-uplets : « $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ » est toléré et largement utilisé.

Exemple.
- **Tous les carrés** de réels sont positifs ou nuls : $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0$ (et non $\cancel{\forall x^2 \geqslant 0}$ $\cancel{\text{si } x \in \mathbb{R}}$).
- Certaines valeurs de la fonction f sont positives : $\exists x \in \mathrm{D}_f,\ f(x) \geqslant 0$ (et non $\cancel{\exists f(x)}$...).
- Le nombre 2 est un entier : $2 \in \mathbb{Z}$, ou $\exists n \in \mathbb{Z},\ n = 2$, mais c'est maladroit (et non $\cancel{\exists 2 \in \mathbb{Z}}$).
- **Il n'existe pas** de rationnel dont le carré vaut 2 : $\forall x \in \mathbb{Q},\ x^2 \neq 2$ (et non $\cancel{\nexists x \in \mathbb{Q}}$, $x^2 = 2$).

Règle n° 7

Si l'on veut démontrer une assertion mathématique qui commence par « $\forall x \in \mathrm{E}$ », la démonstration doit **obligatoirement** commencer par « Soit x dans E » (ou « soit $x \in \mathrm{E}$ »).

Exemple. Montrer que
$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}^*},\ \exists a \in \mathbb{C},\ z = a^2.$$

$\boxed{\text{Soit } z \in \mathbb{C}^*}$. L'écriture exponentielle des nombres complexes nous permet de considérer $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\vartheta \in \mathbb{R}$ tels que $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}$. Si l'on pose $a = \sqrt{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\vartheta}{2}}$, on peut écrire, en vertu de la formule de Moivre (licite car $2 \in \mathbb{Z}$),
$$a^2 = \left(\sqrt{r}\right)^2 \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\vartheta}{2}}\right)^2 = r\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\frac{\vartheta}{2}} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta} = z.$$
Ainsi, on a bien montré l'existence d'un complexe a tel que $z = a^2$.

PIÈGE !
La formule de Moivre $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}\right)^n = \mathrm{e}^{n\mathrm{i}\vartheta}$ n'a de sens (et n'est vraie) pour tout réel ϑ que lorsque $n \in \mathbb{Z}$.

Si vous en doutez, tentez avec $\vartheta = 2\pi$ et $n = \frac{1}{4}$...

III Les objets mathématiques courants

III.1 Les ensembles

Les ensembles sont les premiers objets mathématiques. Deux ensembles E et F sont égaux lorsqu'ils ont les mêmes éléments [11] :

$$(\mathrm{E} = \mathrm{F}) \iff (\forall x,\ (x \in \mathrm{E}) \iff (x \in \mathrm{F})),$$

ou encore (principe de double inclusion),

$$(\mathrm{E} = \mathrm{F}) \iff [(\forall x \in \mathrm{E},\ x \in \mathrm{F}) \wedge (\forall x \in \mathrm{F},\ x \in \mathrm{E})].$$

Pour montrer que deux ensembles E et F sont égaux,
- — ou bien on raisonne directement **par équivalence** (possible dans les cas simples).
- — ou bien on procède **par double inclusion** :
  - — Soit $x \in \mathrm{E}$. Montrons que $x \in \mathrm{F}$. Dire que $x \in \mathrm{E}$ c'est dire que [blabla].
  - — Soit $x \in \mathrm{F}$. Montrons que $x \in \mathrm{E}$. Puisque $x \in \mathrm{F}$, on peut dire que [blabla].

PIÈGE !
Il faut avoir compris que les ensembles $\varnothing$, $\{\varnothing\}$ et $\{\{\varnothing\}\}$ sont trois ensembles différents.

L'ensemble $\varnothing$ est l'ensemble vide : c'est un ensemble qui n'a aucun élément. Par exemple, on peut imaginer un sac de courses, mais avec rien à l'intérieur.

L'ensemble $\{\varnothing\}$ est un ensemble qui ne possède qu'un seul élément (on parle de *singleton*). Cet unique élément se trouve être $\varnothing$. On peut imaginer un sac de courses contenant lui-même un sac en plastique, ce dernier ne contenant rien.

L'ensemble $\{\{\varnothing\}\}$ est lui aussi un singleton. Mais son unique élément est $\{\varnothing\}$, qui n'est évidemment pas $\varnothing$, comme on l'a expliqué au-dessus. Ainsi, $\{\{\varnothing\}\} \neq \{\varnothing\}$ puisque ces ensembles n'ont pas les mêmes éléments.

PIÈGE !
Un ensemble peut tout à fait contenir des objets de natures différentes.

Par exemple, $\{\mathbb{R}, \sqrt{2}, x \mapsto x^2\}$ est un ensemble contenant trois éléments : l'ensemble des nombres réels, un nombre réel et une fonction. L'assemblage

$$x \mapsto x^2 \in \{\mathbb{R}, \sqrt{2}, x \mapsto x^2\}$$

est tout à fait correcte, même s'il « fait bizarre [12] à lire ».

III.2 Les fonctions

Intuitivement [13], si E et F sont deux ensembles, une fonction de E dans F « consiste » à « associer » à certains éléments de E un, et un seul, élément de F. L'ensemble des éléments de E qui sont associés à un élément de F est appelé *ensemble de définition* de la fonction. Si x est dans l'ensemble de définition

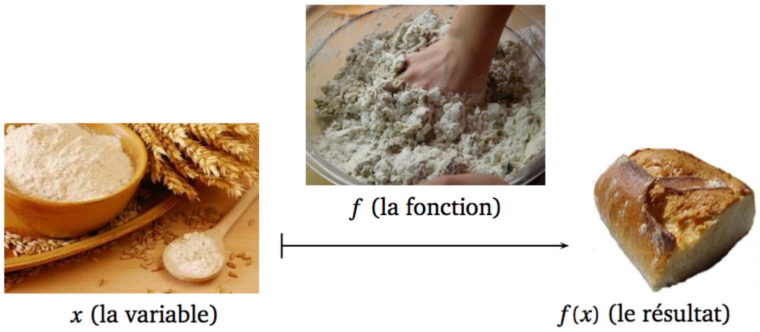
11. Cette affirmation constitue le tout premier axiome de la théorie des ensembles sur laquelle se fondent actuellement les Mathématiques. Il s'appelle *l'axiome d'extensionnalité*.
12. Concept non mathématique : un assemblage est correct ou non, et s'il est correct il est vrai ou faux.
13. Remarquez comment cette définition est bancale : on ne dit pas **ce qu'est** une fonction, on se contente de dire en quoi elle « consiste ». On n'explique d'ailleurs pas ce que veut dire « associer ». Mathématiquement, ce n'est pas recevable.

d'une fonction f, l'élément de F auquel il est associé se note $f(x)$. L'ensemble de toutes les images se note $\mathrm{Im}(f)$.

Il est possible de définir rigoureusement la notion de fonction (cf. cours de Sup). Les fonctions forment donc un nouveau type d'objets mathématiques, à côté de celui d'objets bien connus : les nombres.

Règle absolue

Il ne faut jamais confondre la fonction f et l'image $f(x)$.



Sur l'exemple illustré, la fonction est le boulanger : elle prend de la farine x, fait quelque chose (pétrir, cuire, etc.) et renvoie le résultat $f(x)$ (du pain). **Dire incorrectement « la fonction $f(x)$ » revient à dire que le boulanger est bien cuit.**

☒ ~~La fonction x^2~~ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\cancel{(x^2)' = 2x}$.
☒ ~~$\cos(x)$~~ est 2π-périodique.

✓ La fonction $x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est $x \mapsto 2x$.
✓ La fonction $x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(x \mapsto x^2)' = x \mapsto 2x$.
✓ Si on note f la fonction $x \mapsto x^2$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par $f'(x) = 2x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
✓ Si on pose $f = x \mapsto x^2$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = x \mapsto 2x$.
✓ La fonction cos est 2π-périodique (on évite de commencer une phrase par un symbole mathématique).

PIÈGE !
L'écriture $(\mathrm{X}^2)' = 2\mathrm{X}$ est tout à fait correcte dans l'algèbre $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ des polynômes : il ne s'agit pas de fonctions, et $'$ ne désigne pas la dérivation habituelle !

III.3 Les suites

Les suites sont des fonctions particulières : elles sont définies sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$ ou une partie de la forme $[\![n_0, +\infty[\![$. Les notations suivantes sont donc équivalentes.

— La suite u.
— La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (plus précise car donne l'ensemble de définition). Si le contexte est clair, l'écriture « (u_n) » est possible aussi.
— La suite $n \mapsto u_n$ (peu utilisée).

☒ La ~~suite u_n~~.
☒ ~~u_n est croissante~~.
☒ ~~u_n converge~~.

Rappel : on évite le plus possible de commencer une phrase par un symbole mathématique.

✓ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $\mathbb{C}$.
✓ La suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est croissante.
✓ La suite (u_n) converge.

IV Les principaux types de raisonnement

IV.1 Par l'absurde

Utilité : démontrer une implication $\mathscr{A} \Longrightarrow \mathscr{B}$.

Principe : démontrer $\mathscr{A} \wedge \neg\mathscr{B} \Longrightarrow \mathscr{F}$ où $\mathscr{F} \equiv \mathscr{B} \wedge \neg\mathscr{B}$ est une assertion fausse. Ainsi, il faut supposer $\mathscr{A} \wedge \neg\mathscr{B}$ et orienter ses raisonnements afin de trouver une absurdité.

Rédaction recommandée :
Supposons $\mathscr{A}$. Imaginons un instant $\neg\mathscr{B}$.
[Faire des raisonnements.]
Conclure par : « c'est absurde. Ainsi, $\neg\mathscr{B}$ est fausse et donc $\mathscr{B}$ est vraie. »

Exemple. Démontrer que $\frac{\ln(3)}{\ln(2)} \notin \mathbb{Q}$.

L'implication est cachée ici : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left[x = \frac{\ln(3)}{\ln(2)} \Longrightarrow x \notin \mathbb{Q}\right]$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Supposons que $x = \frac{\ln(3)}{\ln(2)}$. Imaginons un instant que $x \in \mathbb{Q}$. Puisque $x > 0$, on disposerait alors de deux entiers n et p dans $\mathbb{N}^*$ tels que $\frac{\ln(3)}{\ln(2)} = \frac{n}{p}$, si bien que $p\ln(3) = n\ln(2)$ c'est-à-dire $\ln(3^p) = \ln(2^n)$. En composant par exp on obtiendrait $3^p = 2^p$. Or 3^p est impair (car $p \in \mathbb{N}^*$) et 2^n est pair (car $n \in \mathbb{N}^*$), donc c'est absurde. En conclusion, $x \notin \mathbb{Q}$.

Rappel de vocabulaire. Si une implication $\mathscr{A} \Longrightarrow \mathscr{B}$ est vraie,
- l'assertion $\mathscr{A}$ s'appelle la condition **suffisante** : on dit qu'il suffit d'avoir $\mathscr{A}$ pour avoir $\mathscr{B}$.
- l'assertion $\mathscr{B}$ s'appelle la condition **nécessaire** : on dit que pour que $\mathscr{A}$ soit vraie il faut que $\mathscr{B}$ soit vraie.

IV.2 Par contraposée

Utilité : démontrer une implication $\mathscr{A} \Longrightarrow \mathscr{B}$.

Principe : démontrer $\neg\mathscr{B} \Longrightarrow \neg\mathscr{A}$.

Rédaction recommandée :
« Supposons $\neg\mathscr{B}$ ».
[Faire des raisonnements.]
Conclure par : « on a donc montré $\neg\mathscr{A}$ ».

Exemple. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si n^2 est impair, alors n aussi.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que n ne soit pas impair : il est donc pair. Il existe donc $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$, si bien que $n^2 = 4p^2 = 2p'$ où $p' = 2p^2$. Puisque $p' \in \mathbb{N}$, n^2 est pair, c'est-à-dire n^2 n'est pas impair.

IV.3 Par disjonction de cas

Exemple. Démontrer qu'il existe deux irrationnels strictement positifs a et b tels que a^b soit rationnel.

Considérons le réel $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ (défini comme étant $\mathrm{e}^{\sqrt{2}\ln(\sqrt{2})}$). De deux choses l'une.
- Ou bien $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel, dans ce cas on pose $a = \sqrt{2}$ et $b = \sqrt{2}$ et on a gagné.
- Ou bien $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ n'est pas rationnel, dans ce cas on pose $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et $b = \sqrt{2}$ de sorte que

$$a^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2 \in \mathbb{Q}$$

  et on a gagné.

Dans tous les cas on a montré l'existence demandée.

IV.4 Par analyse-synthèse

Utilité : montrer l'existence (et parfois l'unicité) d'un objet dont on n'a aucune idée de la valeur.

C'est le raisonnement de l'inspecteur de police qui recherche les auteurs d'un crime. Dans **l'analyse**, il se dit : « si untel est le criminel, quelles caractéristiques peut-il avoir ? Est-ce un homme ? Est-il (ou elle) jeune ? etc. » Une fois l'analyse terminée, il convoque les suspects, les candidats possibles et fait la **synthèse** : il vérifie un par un ces candidats pour savoir s'ils sont coupables ou non. Tout peut arriver : ne trouver qu'un seul criminel, en trouver plusieurs, en trouver finalement aucun (ce n'était donc pas un crime, mais un accident).

Analyse : on suppose trouvé un objet solution du problème. On passe en revue ce que doit vérifier cet objet. On conclut : si un tel objet existe, alors **nécessairement** (aNalyse - Nécessaire) ce ne peut être que ceci, ceci ou cela.

Synthèse : on passe au crible les candidats précédemment trouvés. On en élimine, ou on les garde tous. S'il n'en reste qu'un, on a prouvé l'unicité de la solution, mais ce n'est pas toujours le cas. Cette phase est l'étude des conditions Suffisantes (Synthèse) pour qu'un objet soit solution.

Exemple. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que toute matrice carrée M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire, de façon unique, comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

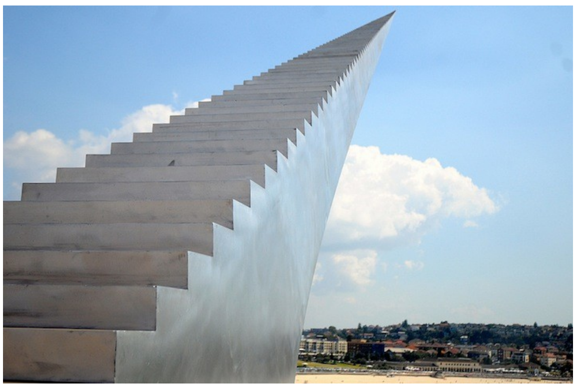
Analyse : supposons trouvées S symétrique et A antisymétrique telles que $\mathrm{M} = \mathrm{S} + \mathrm{A}$. On aura alors $\mathrm{M}^\intercal = \mathrm{S}^\intercal + \mathrm{A}^\intercal = \mathrm{S} - \mathrm{A}$. Ainsi, $\mathrm{M} + \mathrm{M}^\intercal = 2\mathrm{S}$ et $\mathrm{M} - \mathrm{M}^\intercal = 2\mathrm{A}$. En conclusion, si S et A existent, elles ne peuvent être égales qu'à $\frac{1}{2}(\mathrm{M} + \mathrm{M}^\intercal)$ et $\frac{1}{2}(\mathrm{M} - \mathrm{M}^\intercal)$ respectivement. Dit autrement, si elles existent bien, elles sont uniques.

Synthèse : Posons $\mathrm{S} = \frac{1}{2}(\mathrm{M} + \mathrm{M}^\intercal)$ et $\mathrm{A} = \frac{1}{2}(\mathrm{M} - \mathrm{M}^\intercal)$. On a alors
— $\mathrm{S}^\top = \frac{1}{2}(\mathrm{M}^\intercal + (\mathrm{M}^\intercal)^\intercal) = \frac{1}{2}(\mathrm{M}^\intercal + \mathrm{M}) = \mathrm{S}$, donc S est symétrique.
— $\mathrm{A}^\top = \frac{1}{2}(\mathrm{M}^\intercal - (\mathrm{M}^\intercal)^\intercal) = \frac{1}{2}(\mathrm{M}^\intercal - \mathrm{M}) = -\mathrm{A}$, donc A est antisymétrique.
— $\mathrm{S} + \mathrm{A} = \frac{1}{2}(\mathrm{M} + \mathrm{M}^\intercal) + \frac{1}{2}(\mathrm{M} - \mathrm{M}^\intercal) = \mathrm{M}$.

En conclusion, il existe un unique couple (S, A) de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{M} = \mathrm{S} + \mathrm{A}$.

IV.5 Par récurrence

Le raisonnement par récurrence permet de démontrer en une seule fois une infinité de propositions.



Il repose sur le principe suivant, que l'on admet [14].

14. Il résulte immédiatement d'un axiome de la théorie des ensembles : *l'axiome de l'infini*, et de la construction de $\mathbb{N}$ (hors programme).

Principe de récurrence

Soit A une partie de $\mathbb{N}$. Si les deux conditions suivantes sont vraies :
- $0 \in \mathbb{N}$,
- $\forall n \in \mathbb{N},\ \Big[n \in \mathrm{A} \Longrightarrow n+1 \in \mathrm{A}\Big]$,

alors $\mathrm{A} = \mathbb{N}$.

Intuitivement : si l'on sait monter sur la première marche d'un escalier (la marche n° 0) et si l'on sait monter une marche dès lors qu'on a réussi à monter sur la précédente, alors on sait gravir tout l'escalier. Si l'escalier possède un nombre fini de marches, ce fait est banal. L'intérêt du principe de récurrence est qu'il est vrai pour un escalier infini !

On applique généralement ce principe de récurrence pour démontrer qu'une infinité de propositions $\mathscr{P}_n$, paramétrées par un entier naturel, sont vraies. Il existe différentes variantes qui ont leur utilité propre dans des situations différentes.

La récurrence simple consiste à appliquer le principe de récurrence à l'ensemble

$$\mathrm{A} = \{n \in \mathbb{N} \mid \mathscr{P}_n\}.$$

La rédaction recommandée est la suivante.
- Pour chaque n dans $\mathbb{N}$, expliquer ce que l'on note $\mathscr{P}_n$.
- Initialisation : montrer $\mathscr{P}_0$. En général c'est assez facile.
- Hérédité : « soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}_n$ ». On s'évertue alors à montrer $\mathscr{P}_{n+1}$.

La récurrence double consiste à appliquer le principe de récurrence à l'ensemble

$$\mathrm{A} = \{n \in \mathbb{N} \mid \mathscr{P}_n \wedge \mathscr{P}_{n+1}\}.$$

Elle est utilisée pour démontrer des propriétés concernant des suites définies par des relations de récurrence d'ordre 2. La rédaction recommandée est la suivante.
- Pour chaque n dans $\mathbb{N}$, expliquer ce que l'on note $\mathscr{P}_n$.
- Initialisation : montrer $\mathscr{P}_0$ et $\mathscr{P}_1$. En général c'est assez facile.
- Hérédité : « soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}_n$ et $\mathscr{P}_{n+1}$ ». On s'évertue alors à montrer $\mathscr{P}_{n+2}$.

La récurrence forte consiste à appliquer le principe de récurrence à l'ensemble

$$\mathrm{A} = \{n \in \mathbb{N} \mid \mathscr{P}_1 \wedge \mathscr{P}_2 \wedge \ldots \wedge \mathscr{P}_n\}.$$

Elle est utilisée quand les types précédents de récurrences sont inopérants, c'est-à-dire quand, pour montrer $\mathscr{P}_n$, on a besoin d'avoir montré $\mathscr{P}_k$ avec $k < n$ (mais on ne sait pas lequel !).
- Pour chaque n dans $\mathbb{N}$, expliquer ce que l'on note $\mathscr{P}_n$.
- Initialisation : montrer $\mathscr{P}_0$. En général c'est assez facile.
- Hérédité : « soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}_k$ pour tout $k \leqslant n$ ». On s'évertue alors à montrer $\mathscr{P}_{n+1}$.

V Quelques méthodes pour réussir

Le mot *méthode* vient du grec : μετά (après) + ὁδός (chemin). On retrouve la racine *hod dans *cathode* et *anode* (qui aurait dû s'écrire *anhode) en Chimie, et dans le mot *exode* (qui aurait dû s'écrire *exhode.

V.1 Conseils généraux

• Avoir une bonne hygiène de vie : dormir suffisamment (7 heures par nuit est un minimum recommandé), faire un peu de sport chaque semaine. Une alimentation raisonnable permet de garder une bonne concentration (et la ligne, accessoirement).

• Ne pas abandonner ses loisirs, ne pas couper les ponts avec ses amis : ce serait source de déprime.

• Travailler régulièrement : il ne sert à rien de passer 6 heures non-stop sur son cours la veille d'un DS ou d'une khôlle. Il faut travailler (un peu ?) chaque jour afin de bien assimiler les notions.

• À la fin de chaque journée, passer une quinzaine de minutes par matière pour faire un bilan du cours de la journée : *qu'ai-je appris aujourd'hui ? Quels sont les résultats importants du cours ?* Inutile de l'écrire, le dire pour soi est suffisant. Il est cependant important de revenir dessus 2-3 jours après : les spécialistes affirment que le cerveau est pleinement efficace 70 heures après avoir assimilé une information.

• Il faut certes relâcher la pression pendant le week-end, mais passer deux jours sur les réseaux sociaux à regarder des vidéos de chatons ou à jouer aux jeux vidéo est la méthode infaillible pour rater son année.

V.2 Apprendre *versus* comprendre

Apprend-on avant d'avoir compris, ou l'inverse ? Épineuse question : si l'on apprend sans comprendre, que va-t-on retenir ? Si l'on n'apprend pas, comment peut-on espérer comprendre ?

Fait amusant, et néanmoins instructif. En grec, *apprendre* et *comprendre* se disent de la même façon : μανθάνω, qui a donné le mot *mathématiques.*

• **Il y a des choses qui s'apprennent sans comprendre.** Par exemple l'alphabet grec. Pourquoi α s'appelle-t-il *alpha* ? Parce que, point barre.

Exemple. Une fonction qui est dérivable et dont la dérivée est continue s'appelle une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Il n'y a rien à comprendre (si ce n'est les mots utilisés), c'est une définition.

• **Il y a des choses qui s'apprennent après se les être représentées**, par exemple avec un schéma, ou en se donnant un exemple. Une fois représentée, on trouve un moyen de l'enregistrer de façon durable, avec des moyens mnémotechniques, ou en scandant la phrase à retenir (comme pour une récitation).

Exemple. Un théorème sur les suites dit que **toute suite croissante et majorée converge**. Cette phrase doit être répétée, comme une musique, à tel point que l'oubli d'une seule syllabe doit sonner faux. Auparavant, on aura fait un dessin, représentant effectivement une suite croissante, majorée, et en se convaincant qu'elle a bien une limite finie (ce que veut dire *converger*).

• **Il y a des choses qui s'apprennent après les avoir démontrées**, c'est par exemple le cas des formules de trigonométrie, que l'on démontre une fois, et puis c'est tout. Il faut ensuite les retenir par cœur.

Exemple. Les deux formules de trigonométrie les plus connues sont

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b), \qquad \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

valables pour tous réels a et b. On les démontre dans le cours de Géométrie (grâce au produit scalaire) et après on les retient grâce au moyen mnémotechnique suivant

— COsinus = NON mélange, NON respect,

— sinus = mélange, respect.

En effet, dans la formule donnant $\cos(a+b)$ on voit que les fonctions cos et sin ne se mélangent pas, et que le signe + devient − : il n'y a pas respect du signe. En revanche, dans la formule donnant $\sin(a+b)$, les fonctions cos et sin se mélangent, et le signe + reste +.

• **Il y a des choses qui ne s'apprennent pas par cœur, on les retrouve au cas par cas**.

Exemple. Une formule de trigonométrie dit que $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$ pour tout réel x. Plutôt que d'apprendre par cœur cette importante relation et de risquer de se tromper, mieux vaut toujours dessiner mentalement un cercle trigonométrique, de placer les angles x et $\frac{\pi}{2} - x$, et de constater une symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$: les abscisses et les ordonnées sont donc échangées.

V.3 Travailler son cours

• Le lire, évidemment, ce qui sous-entend l'avoir pris avec soin. Si l'on trouve qu'un passage est bizarre, le noter dans la marge pour demander au professeur des explications. On peut aussi vérifier sur le poly de cours si celui-ci est distribué.

• Il faut impérativement apprendre son cours avec une feuille de brouillon. Refaire les démonstrations sur le brouillon, pour voir que toutes les étapes sont comprises. Refaire sur le brouillon les exemples du cours.

• Un théorème s'apprend avec ses **hypothèses**, et pas seulement la formule qui vient à la fin !

• Privilégier la mémorisation des étapes/idées clés dans les démonstrations, plutôt que l'apprentissage brutal : vous pensez vraiment qu'un être humain peut retenir par cœur autant de choses ? Bien sûr que non, il faut synthétiser, réduire, compresser et ne retenir que les idées articulantes d'une preuve. C'est ÇA dont vous aurez besoin plus tard dans votre vie professionnelle.

• On doit absolument comprendre l'architecture du cours, des chapitres, pourquoi telle notion est utile pour telle autre ? Pourquoi ce lemme avant ce théorème ? Pour en arriver à quoi ? Au fait, quel était le titre du paragraphe ?

• Faire des fiches : y inscrire le plan du cours, les théorèmes importants, les méthodes clés. Il est important de les faire soi-même : c'est leur conception qui permettra à votre cerveau de bien mémoriser. Relire les fiches trois jours après, comme expliqué plus haut (les fameuses 70 heures du cerveau).

• Un bon conseil : numéroter toutes ses copies de cours, ses TD, pour pouvoir les remettre dans l'ordre sans problème en cas d'accident.

• Très important : réquisitionnez votre petit frère, cousin, neveu, copain/copine ou nounours et faites-lui un mini cours de maths sur les notions apprises. Si vous êtes capables de le faire, si vous savez « jouer les profs », c'est bon, c'est dans la boîte ! Ce petit exercice peut se faire par exemple en petit groupe. Il vous permettra d'améliorer votre oral par la même occasion.

V.4 Chercher ses exercices de TD

• Vous devez préparer les exercices de TD demandés à l'avance, voire en faire un peu plus si vous le pouvez. Venir en TD sans avoir travaillé (et pire encore : ne pas avoir appris son cours) est une pure perte de temps. Vous subirez passivement la correction, penserez avoir compris quelque chose, mais il ne restera que très peu de choses le jour du DS.

• Utiliser un cahier de brouillon (s'en procurer une petite dizaine avant la rentrée). Souvent les élèves n'osent pas écrire par peur de se tromper. Le travail mathématique se fait par l'erreur : on essaie, on se trompe, on recommence, on change de chemin, on en découvre un autre, etc.

• Ne pas abandonner si l'on ne trouve pas tout de suite : sinon prenez un livre de 5^{e} si vous avez envie de faire des exercices faciles qui ne vous apporteront rien. Repérer quelle notion du cours cela fait intervenir. Ressasser les méthodes connues, et la grande clé de la réussite : savoir changer de chemin de raisonnement quand celui-ci n'aboutit pas. C'est bien plus difficile qu'on ne le croit car on doit oublier le mauvais chemin précédent.

V.5 Réussir ses DS

Profitons de cette section pour signaler que « devoir sur table » souvent abrégé en DST est le plus beau des pléonasmes : où voudriez-vous faire un devoir ailleurs que sur une table ? Personnellement, même chez moi, j'écris sur une table.

• Numérotez vos copies au format n/N (où N est le nombre total de copies). Cette tâche est obligatoire et doit être faite **pendant** l'épreuve, pas quand le professeur/le surveillant annonce que vous devez cesser d'écrire.

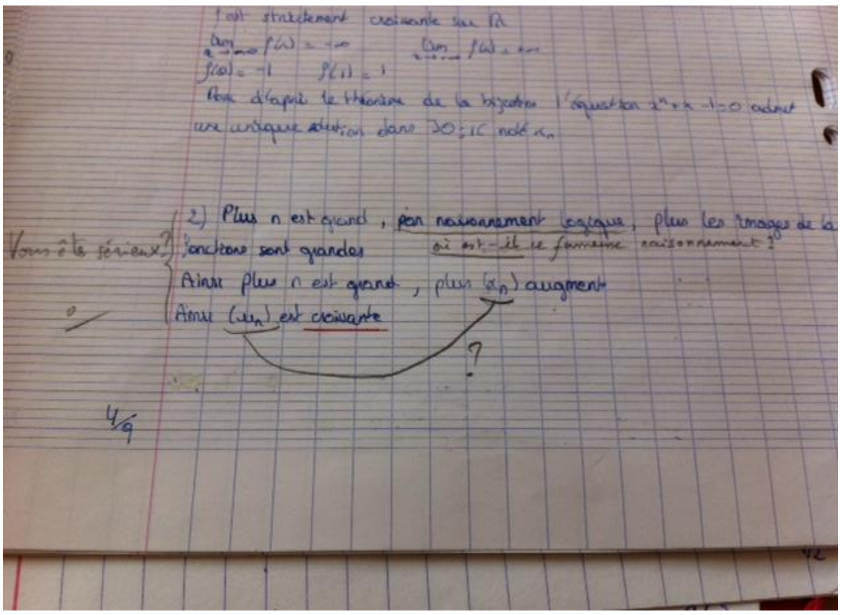
• Assurer un maximum de points en sachant répondre aux questions de cours.

• Écrire lisiblement (pas d'encre bleu clair coupée à l'eau), sans faute de français, avec une marge, en encadrant les résultats à la règle afin que le correcteur soit bien disposé en prenant votre copie : ce sont des points facilement gagnés (ou plutôt facilement non perdus).

• Ne pas rendre une copie « jeu de piste » : traiter le plus possible les exercices dans l'ordre, ou en tout cas ne pas éparpiller un même exercice sur plusieurs endroits. Ce n'est pas une chasse au trésor.

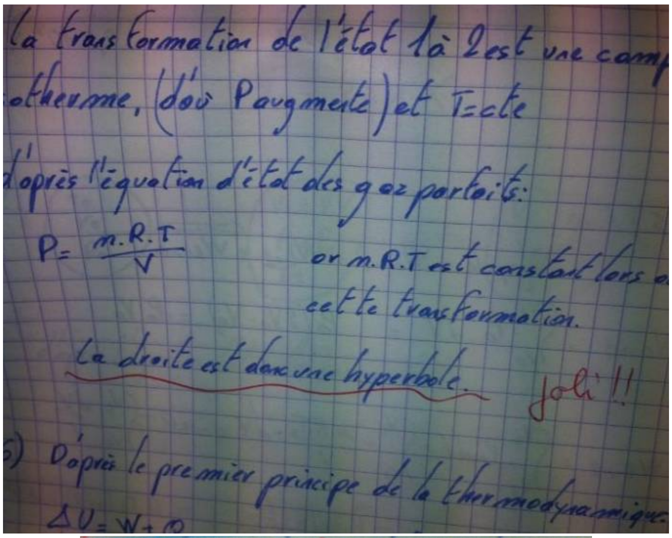
• Gérer son temps : il n'est pas rentable de passer 35 mn sur une question. On passe, en disant qu'on admet ce résultat.

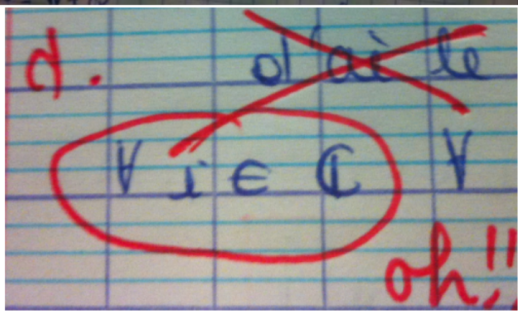
• Bannir le bluff : restez honnêtes même si vous êtes tentés de conclure par un « on voit bien que ». On oublie donc les adverbes *logiquement*, *forcément*, etc.



Règle absolue

N'écrivez pas des choses qui ne veulent rien dire. Relisez-vous.





V.6 Répondre aux questions posées

Le titre de ce paragraphe sembler incongru. Pourtant, beaucoup d'élèves ne répondent pas correctement aux questions posées. Donnons des exemples.

Question 1. Quelles sont les solutions de $x^2 = 3$?

Exemple de mauvaise réponse. $\mathrm{S} = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$.

Plusieurs remarques. Premièrement, la question est posée en français, on attend donc une réponse en français. Celle-ci doit commencer par « les solutions de $x^2 = 3$ sont (...) ». Ensuite, on demande les solutions d'une équation, on attend donc des nombres, et l'élève donne... un ensemble[15].

Une bonne réponse. Les solutions de $x^2 = 3$ sont $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$.

Question 2. Comment définit-on la partie entière (par défaut) d'un réel ?

Exemple de mauvaise réponse 1. C'est quand $n \leqslant x < n + 1$.

Outre le fait que « c'est quand » n'a pas sa place dans une définition, la phrase ne répond pas à la question. De plus, que représentent les lettres x et n ?

Exemple de mauvaise réponse 2. C'est $\lfloor x \rfloor$.

Ici, on n'explique rien, on ne sait toujours pas comment est définie la partie entière d'un réel. La réponse donne juste une notation.

Une bonne réponse. On appelle *partie entière* (par défaut) d'un réel x l'unique entier relatif n tel que $n \leqslant x < n + 1$.

15. Ou plus exactement, il répond une égalité, ce qui est encore pire.

$\boxed{\textbf{Question 3.}}$ Quand dit-on qu'un triangle est rectangle ?

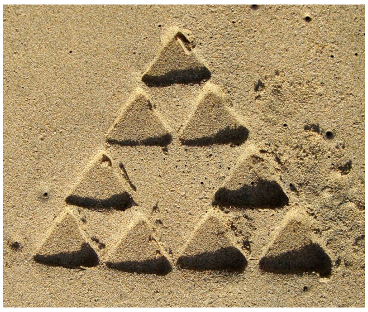
Exemple de mauvaise réponse. Un triangle est rectangle quand le carré d'un de ses côtés vaut la somme des carrés des deux autres.

On demande une définition, pas un théorème caractérisant les triangles rectangles. Bien que la réponse ait une syntaxe correcte, et soit logiquement juste, elle ne correspond pas à la question posée.

Une bonne réponse. <u>On dit</u> qu'un triangle est *rectangle* quand l'un de ses angles est droit.

VI Exercices : entraînement mathématique estival

Faites ces exercices soigneusement, proprement, et évidemment, en les rédigeant le mieux possible : c'est tout de même l'objet de ce cours ! Mieux vaut en faire moins mais bien, que de tout faire sans soin. Votre travail doit être bien réparti sur les vacances pour que vous assimiliez les méthodes et conseils.



De la bonne rédaction

Exercice 1 *(Alphabet grec).*

1. Écrire : psi majuscule, khi minuscule, gamma minuscule, gamma majuscule, phi minuscule, zêta minuscule, nu minuscule, ksi minuscule, ksi majuscule.
2. Donner les noms de Δ, τ, Υ, ψ, Λ, Θ, ι, ξ, σ, η, P, Π.
3. Lire les noms des savants grecs suivants, et donner leur version française.

   Θαλής, Διόκλης, Ἀρχιμήδης, Πυθαγόρας, Ἐρατοσθένης, Εὐκλείδης, Πλάτων.

   Attention de ne pas confondre $\varkappa$ (que l'on peut aussi noter κ) et χ. Le σ final s'écrit ς.
4. Réciter l'alphabet grec en moins de 15 secondes.

Exercice 2 Dans l'assemblage suivant,

$$t \longmapsto \sum_{k=0}^{n} \int_{k}^{k+1} \cos(x+t+a)\mathrm{d}x,$$

quelles sont les lettres muettes ?

Exercice 3 Résoudre l'équation $x^2 + x - 1 = 0$, avec une rédaction irréprochable : présentation de ce que vous appelez discriminant, présentation des solutions ou de l'ensemble des solutions (mais pas de mélange), etc.

Exercice 4 Corriger l'orthographe des phrases suivantes. Les fautes sont marquées d'une *.

1. On *considére une fonction f *definit sur un *interval.
2. Étant *données des droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ *tel que $\mathscr{D} \cap \mathscr{D}'$ soit un point, on peut dire qu'elles sont *paralèles.
3. Si $x \in \mathbb{R}$, *ils *existent toujours deux nombres *rationels a et b *tel que $a < x < b$.
4. On *fais un *résonnement par *reccurence.
5. On *résoud *l'equation $2x^2 + x - 1 = 0$.
6. On dit qu'une fonction f *s'anulle *si il existe $x \in \mathrm{D}_f$ tel que $f(x) = 0$. On dit que f est la fonction nulle quand $f(x) = 0$ *quelque soit x dans D_f.
7. La fonction *polynome P (on dit aussi fonction *polynômiale) est de *degrés 2.

Exercice 5 Voici une démonstration très mal rédigée du fait que tout complexe admet une racine cubique : corriger cette démonstration (rigueur mathématique et syntaxique).

On note $r = |z|$ et $\vartheta = \arg(z)$. Du coup $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}$. On note $a = r^{\frac{1}{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\vartheta}{3}}$. Or : $a^3 = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}$. Donc : on a que a est une racine cubique de z.

Indications : qui est ce z ? Peut-on toujours prendre l'argument de n'importe quel nombre complexe ? Le verbe *noter* est-il bien employé ? La ponctuation est-elle correcte ?

Exercice 6 Dans les phrases suivantes, un élève introduit des lettres sans les présenter. Rectifier ce manquement.

1. Soit z un nombre complexe que l'on écrit $z = a + b\mathrm{i}$.
2. On veut résoudre $x^2 + x + 1 = 0$ dans $\mathbb{R}$. On a $\Delta = b^2 - 4ac = -3$, donc il n'y a pas de solution.
3. Soit n^3 le cube d'un entier.
4. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

Exercice 7 Un élève souhaite démontrer par récurrence que $6^n - 1$ est un multiple de 5 pour tout n dans $\mathbb{N}$. Il écrit le texte suivant.

> Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété « $\forall n \in \mathbb{N},\ 6^n - 1$ est un multiple de 5 ».
>
> $\mathscr{P}_0$ est vraie car $6^0 - 1 = 0$ et 0 est bien un multiple de 5.
>
> On suppose $\mathscr{P}_n$. On a alors $6^n - 1 = 5k$. On a donc :
>
> $$6^{n+1} - 1 = (6^n - 1 + 1) \times 6 - 1 = (5k + 1) \times 6 - 1 = 5 \times 6k + 6 - 1 = 5 \times (6k + 1).$$
>
> Du coup c'est vrai.

Expliquer pourquoi sa rédaction est incorrecte en plusieurs points.

Exercice 8 Un élève doit montrer qu'étant donné deux nombres complexes z et z', $\mathfrak{Re}(zz') \neq \mathfrak{Re}(z)\mathfrak{Re}(z')$ en général. Sa rédaction est la suivante.

— Soit z et z' dans $\mathbb{C}$. On dispose donc de $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $z = a + b\mathrm{i}$ et $z' = c + d\mathrm{i}$.
— Ainsi, $zz' = (a + b\mathrm{i})(c + d\mathrm{i}) = (ac - bd) + (ad + bc)\mathrm{i}$, si bien que $\mathfrak{Re}(zz') = ac - bd$.
— Or $\mathfrak{Re}(z)\mathfrak{Re}(z') = ac$ et $ac \neq ac - bd$, on a donc prouvé que $\mathfrak{Re}(zz') \neq \mathfrak{Re}(z)\mathfrak{Re}(z')$

Pourquoi cette démonstration n'est pas correcte ? Comment la rectifier ?

Exercice 9 Les phrases suivantes sont toutes incorrectes. Les corriger.

1. La suite u_n est croissante.
2. La fonction $\cos(x)$ est périodique.
3. $\ln(x)$ est croissante sur $]0, +\infty[$.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, f est croissante.
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ est croissante.
6. x^3 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(x^3)' = 3x^2$.
7. Si on pose $u = x^2$, alors $u' = 2x$.
8. Les solutions de $x^2 + x = 0$ sont $\mathrm{S} = \{0, -1\}$.
9. $\lim\limits_{x \mapsto 0} f(x) = 1$.
10. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.
11. Pour tout $x > 0$, la primitive de $\frac{1}{x}$ est $\ln(x)$.
12. Une matrice symétrique c'est quand elle est égale à sa transposée.

Exercice 10 Dans les phrases suivantes, les symboles mathématiques ont été mal employés. Les corriger.

1. On sait que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 \geqslant 0$.
2. On sait que dans $\mathbb{C}$, $\exists z$ tel que $z^2 = -1$. Par exemple, $z = \mathrm{i}$.
3. La fonction f est paire quand $f(-x) = f(x)\ \forall x \in \mathrm{D}_f$.
4. Puisque $x + 1 = 2 \Longrightarrow x = 1$.
5. La fonction est paire.
   $\Longrightarrow$ On l'étudie seulement sur $\mathbb{R}_+$.
6. Soit Δ le discriminant de $\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1$. Puisque le Δ est < 0, il n'y a pas de solution de $\mathbb{R}$.

Exercice 11 En respectant la façon dont on énonce un théorème, énoncer

— le théorème des valeurs intermédiaires (plusieurs formes possibles).
— le théorème du rang.
— le théorème fondamental de l'Analyse concernant les fonctions de la forme $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.
— le théorème des accroissements finis.

Indication : avez-vous bien présenté chaque objet, même s'il vous semble évident ?

Exercice 12 En respectant la façon dont on énonce une définition, donner

— la définition d'une fonction croissante sur une partie D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
— la définition d'un nombre premier.
— la définition de la matrice identité I_n, si $n \in \mathbb{N}^*$.
— la définition d'une matrice triangulaire supérieure de taille n, si $n \in \mathbb{N}^*$.
— la définition de la matrice d'une application linéaire $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ dans un couple de bases $(\mathscr{B}_\mathrm{E}, \mathscr{B}_\mathrm{F})$, si E et F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
— la définition d'un groupe.
— la définition d'une bijection d'un ensemble X sur un ensemble Y.
— la définition de l'image réciproque d'une partie B de Y par une application $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$.
— la définition de l'image directe d'une partie A de X par une application $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$.
— la définition du produit AB deux de matrices : A dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et B dans $\mathscr{M}_(p, q)(\mathbb{R})$, si n, p, q sont dans $\mathbb{N}^*$.

Écriture formalisée

Rappel.

Si E désigne l'ensemble des diviseurs positifs de 12, on peut écrire

$$\mathrm{E} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}.$$

C'est l'écriture de E en *extension*. Mais on peut aussi écrire

$$\mathrm{E} = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N},\ 12 = nk\}.$$

C'est l'écriture de E en *compréhension*.

Exercice 13 Un élève veut écrire formellement l'ensemble de tous les réels dont l'exponentielle est strictement plus grande que 2. Il écrit **incorrectement**

$$\{\forall x \in \mathbb{R} \mid \mathrm{e}^x > 2\}.$$

1. Expliquer son erreur et proposer une écriture correcte.
2. Écrire cet ensemble sous forme d'un intervalle.

Exercice 14 Soit E l'ensemble des réels dont le carré vaut 2.

1. Donner une écriture en extension de l'ensemble E.
2. Donner une écriture en compréhension de l'ensemble E.

Exercice 15 Soit E l'ensemble des réels dont le carré vaut -1.

1. Donner une écriture en extension de l'ensemble E.
2. Donner une écriture en compréhension de l'ensemble E.

Exercice 16 Soit E l'ensemble des complexes dont le carré vaut -1.

1. Donner une écriture en extension de l'ensemble E.
2. Donner une écriture en compréhension de l'ensemble E.

Exercice 17 Soit E l'ensemble des nombres premiers inférieurs à 20.

1. Donner une écriture en extension de l'ensemble E.
2. Donner une écriture en compréhension de l'ensemble E.

Exercice 18 *(appartenance ou inclusion ?)*

1. Soit $\mathrm{E} = \{1, 2\}$. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies ?
$$1 \in \mathrm{E}, \qquad \{1\} \in \mathrm{E}, \qquad \{2\} \subset \mathrm{E}, \qquad \varnothing \in \mathrm{E}, \qquad \varnothing \subset \mathrm{E}, \qquad \{\varnothing\} \subset \mathrm{E}.$$
2. Soit a, b, c, d des ensembles. Démontrer que $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$ si et seulement si $a = c$ et $b = d$.
3. Donner un exemple d'ensemble E possédant un élément a tel que $a \subset \mathrm{E}$.
4. Quelle est la différence entre $\mathscr{P}(\varnothing)$, $\mathscr{P}(\{\varnothing\})$ et $\mathscr{P}(\{\{\varnothing\}\})$?

Exercice 19 *(Version).* Traduire dans un français correct, si possible élégant, sans utiliser le mot-à-mot, sans prononcer les variables muettes. La lettre E désigne ici un ensemble et $\mathscr{P}$ un prédicat sur E (c'est-à-dire pour tout élément x de E, $\mathscr{P}(x)$ est une assertion).

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{Z},\ x \leqslant n.$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, [(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ |x| \leqslant \varepsilon) \Longrightarrow x = 0].$
3. $\exists z \in \mathbb{C},\ z^3 = 1 + \mathrm{i}.$
4. $[\exists x \in \mathrm{E},\ \mathscr{P}(x)] \wedge [\forall y \in \mathrm{E},\ \forall z \in \mathrm{E},\ (\mathscr{P}(y) \wedge \mathscr{P}(z) \Longrightarrow y = z)].$

Exercice 20 *(Thème).* Traduire à l'aide d'assertions quantifiées.

1. Aucun rationnel n'a un carré valant 2.
2. Le cosinus d'un réel ne peut jamais valoir 3.
3. On peut trouver au moins un nombre complexe dont l'exponentielle vaut -1.
4. Le nombre 5 est un nombre premier.
5. Étant donné une droite du plan affine, et un point extérieur à cette droite, il existe une unique droite passant par ce point, ne rencontrant pas la première droite.

Pour la dernière phrase, on notera $\mathscr{P}$ le plan affine, et Δ l'ensemble des droites de $\mathscr{P}$.

Exercice 21 On note H l'ensemble des êtres humains. L'ensemble des êtres humains mâles sera noté G et l'ensemble des êtres humains femelles sera noté F. Nous ferons l'hypothèse simplificatrice suivante :
$$\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \varnothing \qquad \text{et} \qquad \mathrm{F} \cup \mathrm{G} = \mathrm{H}.$$

Soit x et y dans H.

— Pour dire que « x aime y » nous écrirons $x\heartsuit y$.
— Pour dire que « x est plus jeune que y » nous écrirons $x \prec y$.
Bien que le verbe aimer soit hautement polysémique[16] nous admettrons que l'on définit ainsi deux relations binaires $\heartsuit$ et $\prec$ sur l'ensemble H. On note plutôt $x\not\heartsuit y$ plutôt que $\neg(x\heartsuit y)$.

On demande de formaliser les phrases suivantes en langage formalisé. On ne se préoccupera pas de leur valeur de vérité. On rappelle que les symboles $\nexists$ ou $\not\Longrightarrow$ ne sont pas autorisés dans un langage formalisé correct.
— Tout le monde aime tout le monde.
— Personne n'aime personne.
— Tout le monde aime quelqu'un.
— Chaque fois que deux hommes aiment une même femme, ces deux hommes ne s'aiment pas.
— Certains hommes sont gays. *Indication : utiliser une implication.*
— L'amitié n'est pas toujours un sentiment réciproque.
— Il arrive qu'une amitié soit payée de retour.
— Les amis de mes amis sont mes amis (règle générale).
— Le plus âgé des êtres humains est un homme et il aime toutes les femmes qui ont plus de 50 ans.
— Le plus âgé des êtres humains est un homme et il aime uniquement toutes les femmes qui ont plus de 50 ans.

Du calcul

Faire du calcul n'est pas à proprement parler faire des Mathématiques, de même qu'écrire des mots n'est pas forcément faire de la Littérature. Toutefois, le calcul est un outil essentiel pour faire des Mathématiques.

Exercice 22 Factoriser le plus possible $4x^2 - 9 - (4x-9)(2x+3)$.

Exercice 23 1. Simplifier le plus possible

$$\mathrm{A} = \frac{7}{3} + \frac{3}{7} \times \frac{5}{11}, \qquad \mathrm{B} = \left(\frac{7}{3} + \frac{3}{7}\right) \times \frac{5}{11}, \qquad \mathrm{C} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}{\frac{3}{5} \times \frac{11}{-9}}, \mathrm{D} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}.$$

2. On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Simplifier $\frac{1+2+\ldots+n^2}{1+2+\ldots+n}$.

3. Simplifier au maximum :

$$\mathrm{A} = 8^3 \times \frac{1}{4^2}, \qquad \mathrm{B} = \frac{27^{-1} \times 4^2}{3^{-4} \times 2^4}, \qquad \mathrm{C} = \frac{(10^5 \times 10^{-3})^5}{(10^{-5} \times 10^3)^{-3}}.$$

Exercice 24 Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 1$. Après avoir simplifié le plus possible, montrer que

$$\frac{(n-1)!}{n!} - \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Exercice 25 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n \cdot n!}$.

Montrer que (v_n) est décroissante en simplifiant au maximum $v_{n+1} - v_n$.

Réponse. On devra trouver $v_{n+1} - v_n = \frac{-1}{n(n+1)\cdot(n+1)!}$ *: refaites le calcul jusqu'à ce que vous ne vous trompiez plus.*

Exercice 26 (*Autour des polynômes :* $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$*, et fractions rationnelles :* $\mathbb{K}(\mathrm{X})$).

16. Car aimer sa copine, aimer sa mère et aimer le chocolat n'ont à peu près aucun rapport entre eux. Il y a au moins quatre façons de l'exprimer en grec : φιλέω, ἀγαπάω, στέργω, ἐράω (cherchez-en le sens), et au moins **dix** en arabe littéraire !

1. Mettre sous forme canonique $X^2 + X + 1$, c'est-à-dire l'écrire sous la forme $\alpha(X - x_0)^2 + \beta$ où α, β, x_0 sont des constantes.
2. Mettre sous forme canonique $2X^2 - 6X + 3$.
3. Si $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, mettre sous forme canonique $aX^2 + bX + c$.
4. Dans $\mathbb{R}(X)$, écrire $\frac{1}{X^2+X+1}$ sous la forme $\frac{k}{(aX+b)^2+1}$.
5. Trouver deux réels a et b pour que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2, -3\}$, $\frac{1}{(x-2)(x+3)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+3}$.

Exercice 27 — Rappeler comment est définie la fonction $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (cf. cours de Première).
— Si $z \in \mathbb{C}$, expliquer comment est défini le nombre e^z. Que vaut $e^{1+\frac{\pi}{6}i}$?
— Expliquer, si $a \in \mathbb{R}_+^*$, comment on définit $\ln(a)$ (cf. cours de Terminale).
— Expliquer pourquoi si $z \in \mathbb{C}$, il n'a pas de sens en général de considérer $\ln(z)$.
— Expliquer pourquoi π^{1+i} est parfaitement défini, mais pas $(1 + i)^\pi$.

Exercice 28 *(Dans $\mathbb{C}$).*
1. Écrire sous forme exponentielle : -1, i, 3, $1 + i$, $-1 + i\sqrt{3}$.
2. *(extrait CentraleSupélec, oral 2021).* Résoudre $e^z = -1$.
3. Si $z \in \mathbb{C}$, exprimer $\mathfrak{Re}(e^z)$, $\mathfrak{Im}(e^z)$, $|e^z|$ et $\arg(e^z)$ en fonction de z.
4. Soit z et z' dans $\mathbb{C}$. Exprimer $\mathfrak{Re}(zz')$ et $\mathfrak{Im}(zz')$ en fonction des parties réelles et imaginaires de z et z'.
5. Grâce aux formules d'Euler, linéariser $\cos^5(x)$ et $\sin^5(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
6. Résoudre $z^4 + z^2 + 1 = 0$.
7. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathfrak{Re}(z) < 0$ et $\mathfrak{Im}(z) > 0$. Donner une formule exprimant un argument de z.
8. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathfrak{Re}(z) < 0$ et $\mathfrak{Im}(z) < 0$. Donner une formule exprimant un argument de z.
9. Résoudre $z^2 = 1 + i$ et expliquer pourquoi la notation $\sqrt{z}$ n'a pas de sens si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$.

Des équations

Exercice 29 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes, en utilisant au besoin un changement d'inconnue.
1. $x^4 - 2x^2 - 6 = 0$.
2. $\dfrac{2}{(x-1)^2} + \dfrac{5}{x-1} = 0$.
3. $4x + 6\sqrt{x} - 18 = 0$.
4. $e^x + e^{-x} = 4$.
5. $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = y$ où $y \in]-1, 1[$ est donné.

Exercice 30 Résoudre dans $\mathbb{C}$: $3iz + 2\overline{z} + 1 = 0$.

Exercice 31 Pour tout réel m, on considère l'équation

$$(E_m) : (m + 1)x^2 + mx - 1 = 0.$$

1. Résoudre (E_{-1}).
2. Pour quelle(s) valeur(s) de m l'équation (E_m) est-elle une équation du second degré ?
3. Discuter selon les valeurs de m les solutions de (E_m).

Exercice 32 1. Trouver les nombres x et y dont la somme et le produit valent tous les deux 5. On trouvera deux nombres réels.

2. Trouver les nombres x et y dont la somme et le produit valent tous les deux 3. On trouvera deux nombres complexes conjugués.
3. Soit w un nombre réel. On cherche les nombres x et y tels que l'on ait $x + y = xy = w$. Pour quels valeurs de w trouve-t-on des nombres réels ?

Exercice 33 Résoudre les équations trigonométriques suivantes dans l'intervalle proposé.

1. $2\cos^2(t) - 3\cos(t) + 1 = 0$ dans $\mathrm{I} = [0, \pi]$.
2. $\cos(x) = \frac{1}{2}$ dans $\mathrm{I} = [0, 2\pi[$.
3. $\sin(x) = \frac{1}{2}$ dans $\mathrm{I} = [-2\pi, 4\pi[$.
4. $\sin(x) = \frac{1}{2}$ dans $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.
5. $\cos(x) = \sin(x)$ dans $\mathrm{I} =]-\pi, \pi]$.
6. $\sin(x) = 2$ dans $\mathbb{R}$.

Des inéquations

Exercice 34 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $x^2 - 2x + 3 > 0$.
2. $-x^2 + 8x - 15 \geqslant 0$.
3. $4x^2 + 12x + 9 \leqslant 0$.
4. $x^4 - 2x^2 - 6 \leqslant 0$.

Exercice 35 Résoudre dans l'intervalle I proposé les inéquations suivantes.

1. $\cos(x) \geqslant \frac{1}{2}$ dans $\mathrm{I} = [0, 2\pi[$.
2. $\cos(x) \geqslant \frac{1}{2}$ dans $\mathrm{I} = [-\pi, \pi[$.
3. $\sin(x) < \frac{1}{2}$ dans $\mathrm{I} = [0, 2\pi]$.
4. $\tan(x) > 1$ dans $\mathrm{I} = [0, \frac{\pi}{2}[$.

Des dérivées et des intégrales

Exercice 36 Revoir tous les développements limités usuels en 0 du cours de Sup.

— Donner le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $\ln(1 + \sin(x))$.
— Donner le développement limité en 0 à l'ordre 6 de $\sqrt{1 + x^3}$.
— Donner le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $\sqrt{4 + x}$.
— Donner le développement limité en 0 à l'ordre 4 de $\cos(x)^5$.

Exercice 37 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer, grâce aux complexes, la dérivée n^{e} de $f : x \mapsto \sin(2x)\mathrm{e}^{-3x}$.

Indication : commencer par écrire $\sin(2x) = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}$.

Exercice 38 On considère $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Le plan est muni d'un repère d'origine O. Existe-t-il des tangentes à la courbe de f qui contiennent le point O ? Lesquelles ?

Exercice 39 Étudier le sens de variation de $f : x \mapsto x^3 + 2x^2 - 7x - 1$ et justifier le nombre de ses zéros en utilisant le théorème de la bijection.

Exercice 40 *(croissances comparées).*

1. Grâce à une étude de fonction, démontrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 + x \leqslant \mathrm{e}^x$. Illustrer par un graphique.
2. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R},\ \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 \leqslant \mathrm{e}^x$.
3. En déduire enfin que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$, puis que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$.

Exercice 41 On veut montrer que, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x.$$

1. Tracer les fonctions $x \mapsto x - \frac{x^3}{6}$, $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto x$ avec votre calculatrice pour illustrer graphiquement cette double inégalité.
2. On pose $\varphi = x \mapsto \sin(x) - (x - \frac{x^3}{6})$. Calculer φ' et φ''.
3. Étudier les variations de φ', puis celles de φ, et en déduire le résultat cherché.

Exercice 42 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x \geqslant 0, \\ -x^2 & si \quad x < 0. \end{cases}$$

1. Représenter f dans un repère orthonormal.
2. Montrer que f est dérivable en 0 en utilisant son taux d'accroissement.
3. Expliciter $f'(x)$ quand $x < 0$, $x = 0$ et $x > 0$.
4. Montrer que f' n'est pas dérivable en 0.

Exercice 43 Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note I_n l'intégrale suivante.

$$\mathrm{I}_n = \int_1^2 \frac{1}{x^n}\, \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\, \mathrm{d}x.$$

1. Calculer I_2.
2. Expliquer pourquoi pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout réel $x \in [1, 2]$,
$$0 \leqslant \frac{1}{x^n}\, \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \leqslant \frac{\mathrm{e}}{x^n}.$$
3. En déduire un encadrement de I_n puis étudier la convergence de la suite (I_n).

Des probabilités

Exercice 44 Monsieur Grincheux est souvent mécontent après avoir été au restaurant. Pourtant, il y va souvent (mais il n'est pas à une contradiction près). Précisément,

- s'il est mécontent après un restaurant, il y a 60 % de chance qu'il le soit encore après le suivant.
- s'il est content après un restaurant, il y a 80 % de chance que son prochain restaurant soit un désastre et qu'il écrive une lettre incendiaire à la direction pour se plaindre.

On note p_n la probabilité que Monsieur Grincheux soit mécontent après son n^{e} restaurant.

1. Montrer qu'il existe des constantes réelles a, b telle que l'on ait $p_{n+1} = ap_n + b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. On note x l'unique solution de $x = ax + b$. Montrer que $(p_n - x)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
3. En déduire vers quoi tend la probabilité que Monsieur Grincheux soit mécontent à son n^{e} restaurant quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 45 On lance deux fois une pièce de monnaie équilibrée. On considère les événements suivants.

- A : « On obtient pile au 1^{er} lancer ».
- B : « On obtient face au 2^{e} lancer ».
- C : « On obtient la même chose aux deux lancers ».

Montrer que $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ sont deux à deux indépendants, mais pas mutuellement indépendants.

Exercice 46 On considère qu'une année comporte 365 jours. On suppose que les dates d'anniversaires sont équiprobables (ce qui est faux dans la pratique, mais cela permet de simplifier le problème).

1. Dans une classe de 35 élèves, quelle est la probabilité pour que deux élèves soient nés le même jour ?
2. Combien une classe doit-elle comporter d'élèves pour que cette probabilité dépasse 90 % ?

Exercice 47 Soit P une probabilité sur un univers fini Ω, et soit $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ trois événements. Montrer que $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B} \cup \mathrm{C})$ est égal à

$$\begin{gathered} \mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B}) + \mathrm{P}(\mathrm{C}) \\ -\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) - \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}) - \mathrm{P}(\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) \\ +\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{C}). \end{gathered}$$

Des suites

Exercice 48 Soit $a \in \mathbb{R}$. Grâce à un équivalent, trouver $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$.

Méthode : quand un exposant « varie », comme ici, on repasse par la forme exponentielle, $a^b = \mathrm{e}^{b \ln(a)}$.

Exercice 49 Donner un équivalent de $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 50 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En étudiant les variations sur $[0, 1]$ des fonctions

$$f : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n}\right) \quad \text{et} \quad g : x \longmapsto f(x) + \frac{x^n}{n!},$$

   démontrer que $\mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}}{n!} < \mathrm{S}_n < \mathrm{e}$. En déduire la convergence de (S_n) et sa limite.
2. On considère alors la suite (T_n) où $\mathrm{T}_n = \mathrm{S}_n + \frac{1}{n \cdot n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathrm{S}_n < \mathrm{e} < \mathrm{T}_n.$$

3. En déduire que $\mathrm{e} \notin \mathbb{Q}$. Sans calculatrice, déterminer une valeur approchée e à 10^{-2} près.