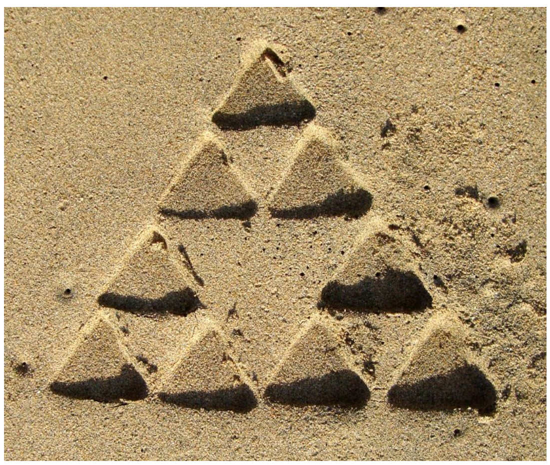
Classe de Mathématiques Spéciales

P. S. I.

Travail estival



P1 → P2B

2025-2026

Vincent ROHART

https://vrohart.e-monsite.com/

Table des matières

Ce qui est attendu pour ce travail estival

Vous avez été jugés aptes à rentrer en deuxième année de classe préparatoire associée ISEP-Stanislas, en filière P.S.I., mes félicitations.

Toutefois, il n'est pas rare que les nouveaux élèves de P2 gardent quelques lacunes non comblées concernant non seulement les mathématiques niveau collège-lycée, mais aussi la syntaxe, française et mathématique.

Pour tenter de vous faire réussir le mieux possible cette année de P2, je vous demande de rattraper les éventuels retards et d'étudier sérieusement et régulièrement ce document. Il comporte une série d'étapes que vous organiserez librement durant juillet et août.

Quand vous travaillerez ce cours et les exercices associés, je vous demande d'éteindre totalement vos téléphones et tout autre appareil qui pourrait affaiblir votre concentration. Il n'est d'autre part pas souhaitable d'avoir recours à l'I.A. pour vous aider. Cet outil est intéressant, mais le but de ce document est de renforcer vos réflexes et vos connaissances, ce que ne fera pas l'I.A..

Un contrôle sera prévu le premier jour afin d'évaluer le sérieux de votre investissement. En cas de défaillance à ce test, une remédiation sera mise en place en dehors des heures de cours pour s'assurer que les connaissances et techniques sont acquises.

Je vous souhaite un bon été, agréable, reposant et studieux.

V. Rohart

Étape

1

Commençons par le français

Les Mathématiques s'expriment, en France, en français. Soigner la langue française c'est assurer un échange mathématique de qualité avec un interrogateur ou un professeur. C'est aussi favoriser la compréhension précise et sérieuse des notions mathématiques.

S'il on ne maîtrise pas la syntaxe de notre langue, il est impossible de créer en son esprit des idées claires sur des notions mathématiques nouvelles.

De plus, votre future vie d'ingénieur(e) demandera une parfaite maîtrise de la langue (en français et en anglais !) afin de défendre un projet, convaincre une équipe, vous faire comprendre par les différents acteurs qui travaillent avec vous.

Il ne s'agit pas de stigmatiser la coquille, la faute d'étourderie, mais d'éradiquer les erreurs récurrentes. Allez, ce n'est pas très compliqué, c'est tout au plus un peu d'attention, et cela vous forcera à avoir une activité saine : **réfléchir au moment où vous écrivez**.

1 Locutions incorrectes

Locutions fautives	Références
Du coup	https://www.academie-francaise.fr/du-coup-au-sens-de-de-ce-fait
Au final	https://www.academie-francaise.fr/au-final
De base(1)	https://www.academie-francaise.fr/de-base
En vrai	https://www.academie-francaise.fr/en-vrai-pour-en-realite
Faire sens	https://www.academie-francaise.fr/faire
Déjà(2)	https://www.dictionnaire-academie.fr/article/A8D0607
On a que	(mésusage uniquement rencontré en mathématiques)

(1) Au sens de « à l'origine ». (2)Au sens de « premièrement ».

• En lieu et place de ~~du coup~~, on emploiera, en s'efforçant de varier :

— donc
— si bien que
— par conséquent
— en conclusion
— ainsi
— par suite
— c'est pourquoi
— dès lors
— aussi
— de ce fait
— finalement
— ...

• **Déjà** est un adverbe équivalent à *already* en anglais. Il ne signifie pas « premièrement » (*at first*).

✓ **Déjà**, le soleil se levait sur l'horizon.
✓ À peine sortis de P1 et **déjà** plein de travail pour les vacances !
☒ ~~Déjà~~, on sait que la première inclusion est vraie.
✓ Premièrement, on sait que la première inclusion est vraie.

• Certains verbes peuvent s'employer dans une **proposition subordonnée complétive**, c'est-à-dire une proposition qui peut être remplacée par un groupe nominal.

— Je vois que le chien court ≡ Je vois la course du chien.
— On sait que tu es beau ≡ On sait ta beauté.

Le verbe *avoir* **ne s'emploie pas** dans une construction complétive :

☒ ~~On a que~~ le chien a mangé ses croquettes.
☒ ~~On a que~~ f est une fonction paire.
✓ On a la parité de f. (Syntaxe correcte mais inélégante : cf. ci-dessous).
✓✓ On sait que la fonction f est paire. (Mieux).

Le verbe *avoir* peut en revanche s'employer dans une **proposition subordonnée relative**, même si celle-ci est lourde et peut avantageusement être remplacée.

— On a un chien qui est gentil ≡ On a un gentil chien.
— On a un réel x qui est positif ≡ On a un réel positif x.

Cependant, la locution « on a », bien que correcte grammaticalement, est souvent inélégante d'un point de vue syntaxique. L'enlever purement et simplement est souvent une solution simple.
≈ ☒ On sait que $x^2 = 1$ et que $x > 0$, donc ~~on a~~ $x = 1$.
✓ On sait que $x^2 = 1$ et que $x > 0$, donc $x = 1$.

2 Orthographes courantes

Orthographes fautives	Orthographes correctes
~~Quelque soit~~	**Quel que soit / Quelle que soit**
~~Quelques soient~~	**Quels que soient / Quelles que soient**
Une fonction ~~tel que~~	Une fonction **telle que**
Des réels ~~tel que~~	Des réels **tels que**
~~Étant donnés~~ des réels	**Étant donné** des réels*
~~Étant données~~ des droites	**Étant donné** des droites*
On ~~résoud~~ / Je ~~résouds~~	On **résout** / Je **résous**
~~Si il~~ (hiatus)	**S'il**
~~Reccurence~~	**Récurrence**
Un ~~Interval~~	Un **Intervalle**
~~Précédament~~	**Précédemment**
~~Polynome~~	**Polynôme**
~~Polynômial(e)~~	**Polynomial(e)**

* Mais on écrit : deux réels étant donnés, deux droites étant données.

• On retient : « quel que soit » s'écrit toujours en **trois** mots (masc./fém. — sing./plur.).

• Les ACCENTS (´, `, ^, ¨) dans la langue française sont obligatoires et font partie de l'orthographe d'un mot. Ne pas les mettre, par flemme ou par fantaisie, constitue une faute entière.

Exemples.

☒ Une fonction ~~derivable~~ (se prononce `[deurivabl']`).

✓ Une fonction **dérivable**.

☒ Un ~~element~~ (se prononce `[euleumã]`) de $\mathbb{R}$ s'appelle un nombre réel.

✓ Un **élément** de $\mathbb{R}$ s'appelle un nombre réel.

3 La ponctuation

• Le deux-points « : » est un signe de ponctuation d'usage courant. En aucun cas il ne peut séparer

— un verbe de son complément.
— une conjonction de subordination (souvent *que*) et la proposition qu'il subordonne.
— un adjectif de son antécédent.
— une conjonction de coordination (*mais ou et donc or ni car*) du terme qu'il coordonne.

Exemples.

☒ [...] Pythagore a dit que $\cancel{:}$ dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse égale[1] la somme des carrés des autres côtés.

✓ [...] Pythagore a dit que dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse égale la somme des carrés des autres côtés.

✓ [...] Pythagore a dit : dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse égale la somme des carrés des autres côtés.

✓ [...] Pythagore a dit que dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal[2] à la somme des carrés des autres côtés.

☒ [...] ainsi, il vient[3] $\cancel{:}$ $x = 0$.

✓ [...] ainsi, il vient $x = 0$.

☒ On sait que $\cancel{:}$ f est paire.

✓ On sait que f est paire.

☒ On a montré que $\cancel{:}$ x ~~est~~ positif.

✓ On *a montré* que x *était* positif (**concordance des temps**).

☒ Soit f définie par $\cancel{:}$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2.$$

✓ Soit f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2.$$

☒ Soit f une fonction telle que $\cancel{:}$ $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

1. Du verbe *égaler*, 3e personne du singulier.
2. Adjectif masculin singulier dont l'antécédent est *le carré*.
3. « Il vient que », tout comme « on a que », est incorrect.

✓ Soit f une fonction telle que $f(x) = 0$ pour tout réel x.

☒ On sait que $x^2 = 9$. Or $\cancel{\because}$ $x \leqslant 0$, donc $\cancel{\therefore}$ $x = -3$.

✓ On sait que $x^2 = 9$. Or $x \leqslant 0$, donc $x = -3$.

• Après « soit », qui sert à introduire un nouvel objet, on met un point.

Exemple.

☒ Soit ~~$n \in \mathbb{N}$, nous~~ affirmons que $2^n + 1$ n'est pas toujours un multiple de 3.

✓ Soit n dans $\mathbb{N}$. Nous affirmons que $2^n + 1$ n'est pas toujours un multiple de 3.

L'erreur de syntaxe commise dans la phrase ci-dessus s'appelle une *anacoluthe* [4] : c'est une rupture syntaxique.

Remarque. Il préférable de ne pas mélanger syntaxe mathématique et syntaxe française. On préférera donc écrire « Soit n dans $\mathbb{N}$ » ou bien encore « Soit n un entier naturel ».

• Avec les coordonnants *or..., donc* et *si..., alors*, l'emploi des virgules est réglementé.

Exemple.

☒ Tous les hommes sont mortels. Or Socrate est un homme. ~~Donc,~~ Socrate est mortel.

✓ Tous les hommes sont mortels. Or Socrate est un homme$\boxed{,}$ donc Socrate est mortel.

Remarque. En toute rigueur, la coordination *donc* ne peut commencer une phrase. C'est l'adverbe *ainsi* qui le remplace dans cet emploi [5].

Exemple.

☒ La fonction f est impaire. ~~Donc,~~ $f(0) = 0$.

✓ La fonction f est impaire, donc $f(0) = 0$.

✓ La fonction f est impaire. Ainsi, $f(0) = 0$.

4. Même étymologie que *acolyte* : c'est une personne qui nous suit (ἀκολουθέω = accompagner, suivre).

5. Attention, l'adverbe *ainsi* a un 2ᵉ sens marquant la comparaison : « Il parle ainsi ».

4 Les lettres cursives et grecques

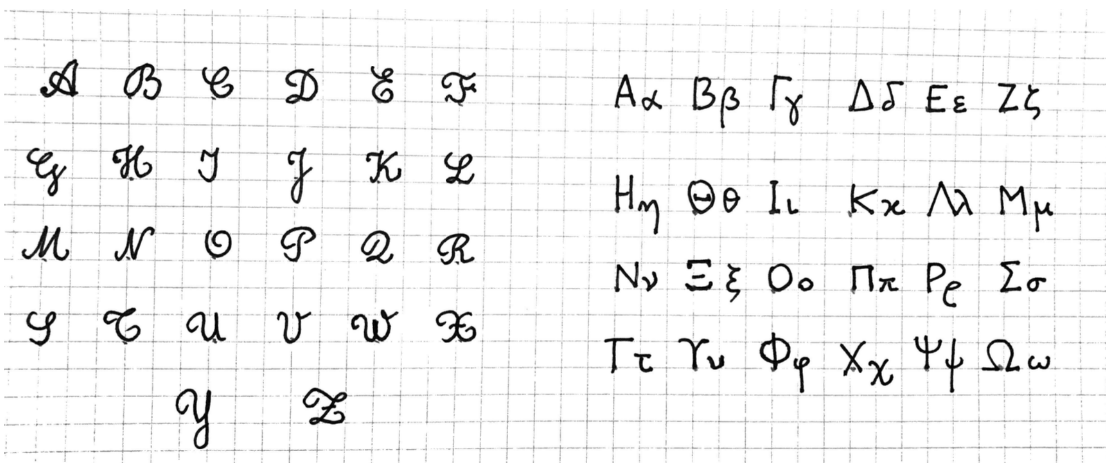
En plus des 24 lettres de l'alphabet grec...

$\mathrm{A}\ \alpha$	$\mathrm{B}\ \beta$	$\Gamma\ \gamma$	$\Delta\ \delta$	$\mathrm{E}\ \varepsilon$	$\mathrm{Z}\ \zeta$	$\mathrm{H}\ \eta$	$\Theta\ \vartheta$
alpha	bêta	gamma	delta	epsilon	zêta	êta	thêta
$\mathrm{I}\ \iota$	$\mathrm{K}\ \varkappa$	$\Lambda\ \lambda$	$\mathrm{M}\ \mu$	$\mathrm{N}\ \nu$	$\Xi\ \xi$	$\mathrm{O}\ o$	$\Pi\ \pi$
iota	kappa	lambda	mu	nu	ksi	omicron	pi
$\mathrm{P}\ \rho$	$\Sigma\ \sigma$	$\mathrm{T}\ \tau$	$\Upsilon\ \upsilon$	$\Phi\ \varphi$	$\mathrm{X}\ \chi$	$\Psi\ \psi$	$\Omega\ \omega$
rhô	sigma	tau	upsilon	phi	khi	psi	oméga

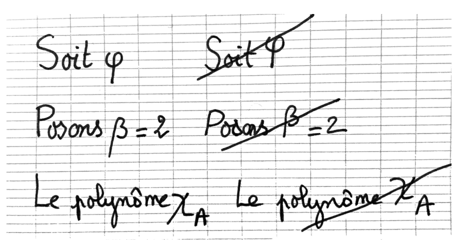
... vous devez connaître (savoir lire et savoir écrire) les 26 lettres cursives de l'alphabet français.

$\mathscr{A}\ \mathscr{B}\ \mathscr{C}\ \mathscr{D}\ \mathscr{E}\ \mathscr{F}\ \mathscr{G}\ \mathscr{H}\ \mathscr{I}\ \mathscr{J}\ \mathscr{K}\ \mathscr{L}\ \mathscr{M}$

$\mathscr{N}\ \mathscr{O}\ \mathscr{P}\ \mathscr{Q}\ \mathscr{R}\ \mathscr{S}\ \mathscr{T}\ \mathscr{U}\ \mathscr{V}\ \mathscr{W}\ \mathscr{X}\ \mathscr{Y}\ \mathscr{Z}$



On remarque la position des lettres minuscules $\beta, \gamma, \eta, \mu, \rho, \varphi, \psi$ par rapport à la ligne :



Exemple. Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de direction F.

On distingue aussi les lettres grasses : **A**, **B**, **C**, ... que l'on écrit fréquemment[6] $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}, \ldots$ Le 1 gras, $\mathbb{1}$, sert à désigner les fonctions indicatrices. Par exemple, $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$ est la fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{R}_+, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

Enfin, des lettres d'autres langues sont parfois utilisées : les gothiques ($\mathfrak{A}, \mathfrak{c}, \mathfrak{Im}, \mathfrak{Re}, \mathfrak{S}$), une lettre hébraïque ($\aleph$: aleph), et une lettre russe (Ш : sha).

5 Exercices d'entraînement

Exercice 1.1 *Des lettres.*

1. Écrire les lettres grecques suivantes, majuscules et minuscules.

   Gamma ; delta ; zêta ; êta ; thêta ; lambda ; ksi ; sigma ; tau ; phi ; oméga.

2. Donner les noms des lettres grecques suivantes.

   $$\varepsilon \cdot \zeta \cdot \eta \cdot \mathrm{X} \cdot \lambda \cdot \mu \cdot \nu \cdot \Xi \cdot \Pi \cdot \mathrm{P} \cdot \Upsilon \cdot \psi \cdot \omega.$$

3. Écrire les cursives majuscules des lettres suivantes.

   $$\mathrm{A} ; \mathrm{B} ; \mathrm{D} ; \mathrm{E} ; \mathrm{F} ; \mathrm{G} ; \mathrm{H} ; \mathrm{L} ; \mathrm{P} ; \mathrm{Q} ; \mathrm{R} ; \mathrm{S}.$$

4. Expliquer pourquoi les lettres grecques présentes dans les expressions suivantes sont mal écrites.
   — Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = x^2$.
   — Si M est une matrice carrée, on pose $\chi_{\mathrm{M}} = \det(\mathrm{XI}_n - \mathrm{M})$.
   — La constante d'Euler est notée $\mathit{\Upsilon}$, elle vaut environ 0,577.

Exercice 1.2 Corriger l'orthographe des phrases suivantes : les fautes ont été signalées par des *.

1. On *considére une fonction f *définit sur un *interval.
2. Il existe deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ *tel que $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$ soit un point.
3. On *fais un *résonnement par *reccurence.
4. On *résoud l'*équation $2x^2 + x - 1 = 0$.
5. On *dis qu'une fonction f s'*anulle *si il existe x dans D_f tel que $f(x) = 0$.

6. On n'a pas le choix en manuscrit !

6. La fonction *polynome P (on dit aussi fonction *polynômiale) est de *degrés 2.
7. *Ils *existent deux réels x et y *vérifiants $x \geqslant 1$ et $x \geqslant y$.
8. *Quelques soient les nombres complexes z et z', le fait que $|z| = |z'|$ n'entraîne pas $z = z'$.

EXERCICE 1.3 Corriger la syntaxe ou la ponctuation des phrases suivantes. Les fautes ont été soulignées.

1. On sait que : tout réel a un carré positif. Donc on a que $x^2 \geqslant 0$ si $x \in \mathbb{R}$.
2. Soit x un réel, on considère son carré x^2.
3. Soit M la matrice que les coefficients sont tous égaux à 1.
4. Déjà, puisque f est bornée on va avoir que pour tout x, $m \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{M}$ avec m et M des réels.
5. Le réel x est positif, or : la fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}_+$ donc , $\sqrt{x}$ existe.
6. Du coup, l'exercice porte sur une matrice M. La matrice M est symétrique, du coup on a que $\mathrm{M}^\top = \mathrm{M}$.

— Un peu de calcul —

EXERCICE 1.4 Simplifier le plus possible.

$$\left(\frac{136}{15} - \frac{28}{5} + \frac{62}{10}\right) \times \frac{21}{24}.$$

$$\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}, \text{ si } n \in \mathbb{N}^*.$$

$$\frac{\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\frac{2n+2}{n^2(n-1)^2}}, \text{ si } n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}.$$

$$10^5 \times 10^3, \qquad \left(10^5\right)^3, \qquad \frac{10^{-5}}{10^{-3}}.$$

$$2^{21} + 2^{32}, \qquad \frac{2^3 \times 3^2}{3^4 \times 2^8 \times 6^{-1}}.$$

$$\sqrt{(-5)^2}, \qquad \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}, \qquad \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}, \qquad \sqrt{11 + 6\sqrt{2}}.$$

EXERCICE 1.5 Soit n un entier tel que $n \geqslant 2$. Simplifier $\dfrac{(n+1)!}{(n-2)!} + \dfrac{n!}{(n-1)!}$.

Exercice 1.6 Factoriser le plus possible le polynôme $4X^2 - 9 - (4X-9)(2X+3)$.

Exercice 1.7 Soit n un entier tel que $n \geqslant 1$. Simplifier $\dfrac{(n-1)!}{n!} - \dfrac{n!}{(n+1)!}$.

Exercice 1.8 Soit n un entier naturel non nul. Expliciter, sans signe $\prod$ ou $\sum$, les expressions suivantes. On rappelle que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

$$\sum_{k=3}^{n} k\ , \quad \sum_{k=3}^{2n} k\ , \quad \sum_{k=1}^{n^2} k^2\ , \quad \prod_{k=1}^{n} k\mathrm{e}^k\ , \quad \prod_{k=1}^{n} 2\mathrm{e}^k.$$

Exercice 1.9 Donner la dérivée 4^e de la fonction $f : x \mapsto x\mathrm{e}^x$.

Exercice 1.10 Soit z le nombre complexe $1+\mathrm{i}$.

1. Calculer z^2 et z^3.
2. Calculer $|z|$ et un argument de z. En déduire une forme exponentielle de z.
3. Déduire de la question précédente la partie réelle de z^n pour tout entier naturel n.

Exercice 1.11 On considère la fonction $f : x \mapsto \cos(x)\mathrm{e}^x$.

1. Si $x \in \mathbb{R}$, écrire $\cos(x)$ à l'aide de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ et de $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}$ (formule d'Euler).
2. Donner le module et un argument de $1+\mathrm{i}$.
3. Trouver un nombre complexe α tel que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \mathfrak{Re}(\mathrm{e}^{\alpha x}).$$
4. En déduire une expression réelle de la dérivée n-ième de f, quel que soit l'entier naturel n.

Exercice 1.12 On note g la fonction $x \mapsto x\ln(x)$.

1. Donner son ensemble de définition et son ensemble de dérivabilité.
2. Étudier le signe de g', et dresser le tableau de variation de g.
3. La courbe de g dans un repère admet-elle une tangente horizontale ? En quel point ?
4. Quel théorème permet de dire que g admet en 0 un prolongement par continuité ? On notera $\tilde{g}$ le prolongement par continuité de g.
5. Montrer que la courbe de $\tilde{g}$ admet une tangente verticale en 0 : on pourra étudier son taux d'accroissement.
6. Tracer la courbe de $\tilde{g}$ dans un repère, **après** avoir placé ses tangentes remarquables et ses intersections avec l'axe des abscisses.

Étape

2 La rédaction en mathématiques

L'étape 1 a fait le point sur l'orthographe, la grammaire et la syntaxe du français. Les Mathématiques utilisent un langage qui a ses propres règles, et cette étape 2 en fait le point. Après avoir bien étudié les sections de cette étape, entraînez-vous sur les exercices proposés.

1 Notons, posons, soit : quelle différence ?

« Poser »

On $\boxed{\text{pose}}$ une égalité lors d'une affectation : c'est la situation où l'on veut donner un nom à une certaine quantité (ou autre objet mathématique) par un symbole (une lettre, ou tout autre symbole qui n'est pas déjà pris). Après « on pose », le symbole = de l'affectation donc est obligatoire.

Exemple 1. On pose $x = \sqrt{2}$. On peut donc dire que $x^2 = 2$.

Exemple 2. On pose $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Ainsi, $\det(\mathrm{M}) = 1 \times 4 - 3 \times 2 = -2$.

Exemple 3. On pose $f = x \mapsto x^2$, de sorte que $f(3) = 9$. *Même si cela vous semble étrange, c'est bien un symbole = et non « : » qu'il faut écrire ici.*

Voici quelques emplois incorrects du verbe *poser*.

- ☒ ~~On pose P un polynôme~~. *Où est l'affectation ? Cf. emploi de « soit » après.*
- ☒ ~~On pose f la fonction cos~~. *Idem. Cf. emploi de « notons » après.*
- ☒ ~~On pose $2 = x$~~. *Il y a un symbole =, mais ce n'est pas une affectation* : cf. remarque suivante concernant `Python`.

Dans le langage `Python`, l'affectation se note =, comme en Mathématiques, tandis que le test d'égalité se note == (qui se note aussi = en Mathématiques !). Dans d'autres langages, l'affectation est parfois notée :=, pour marquer sa dissymétrie : dire « posons $2 = x$ » n'a aucun sens (cf. capture d'écran qui suit), contrairement à `2 == x` qui est totalement équivalente à `x == 2`.

```
IPython 8.12.0 -- An enhanced Interactive Python.

In [1]: x = 2

In [2]: 2 = x
  Cell In[2], line 1
    2 = x
    ^
SyntaxError: cannot assign to literal here. Maybe you meant '==' instead of '='?


In [3]: x == 2
Out[3]: True

In [4]: 2 == x
Out[4]: True
```

« Noter »

On $\boxed{\text{note}}$ par une lettre un nouvel objet. On emploie donc cette expression pour présenter quelque chose de nouveau qui n'a pas encore de nom, comme pour le verbe « poser ». Les exemples suivants reprennent les mêmes situations qu'au paragraphe précédent.

Exemple 1. On note x le réel $\sqrt{2}$. On peut donc dire que $x^2 = 2$.

Exemple 2. On note M la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Ainsi, $\det(M) = 1 \times 4 - 3 \times 2 = -2$.

Exemple 3. On note f la fonction $x \mapsto x^2$, de sorte que $f(3) = 9$.

Voici quelques emplois incorrects du verbe *noter*.

☒ ~~On note $P = X^2 + 1$.~~.

☒ ~~On note $f = \cos$~~.

« Soit »

Le verbe $\boxed{\text{soit}}$[1] utilisé dans ce cadre devient une locution adverbiale (donc est invariable, même si l'usage tend à l'accorder en nombre) et sert à présenter un nouvel objet ou à créer un nom pour nouvel objet : il est impossible d'écrire ~~soit 2~~ ou ~~soit x^2~~, exactement comme en `Python` : cf. capture ci-dessous.

1. Encore une fois, c'est la traduction littérale du grec ancien ἔστω (impératif présent du verbe être, 3e personne du singulier). Mais l'impératif français n'a pas de 3e personne ; on pallie ce manque en employant le subjonctif. Pour présenter un point M, les Grecs disaient donc « que soit un point M » dans le sens de « qu'un point M vienne à exister ».

```
IPython 8.12.0 -- An enhanced Interactive Python.

In [1]: x**2 = 4
  Cell In[1], line 1
    x**2 = 4
    ^
SyntaxError: cannot assign to expression here. Maybe you meant '==' instead of
'='?
```

Dire « soit x un réel » est tout à fait équivalent à dire « considérons un réel x » (sous-entendu : il n'a jamais été présenté avant, et la lettre x n'est pas déjà prise).

Attention !
Pour démontrer une assertion qui commence par

$$\forall x \in \mathrm{E}, [\ldots],$$

la rédaction commence toujours par « soit x dans E ». MAIS il ne faut cependanrt pas en déduire que « soit » est équivalent à « pour tout ».

Exemple.

— Soit c un chat (identique à : considérons un chat, que je décide d'appeler c). J'adopte c.
— Pour tout chat c, j'adopte c.

Dans la première phrase, je n'ai adopté qu'un seul chat : celui que j'ai appelé c. Dans la deuxième phrase j'ai adopté tous les chats qui existaient.

Rappel. Après « soit » suivi du nom de l'objet considéré, on doit mettre un point. La phrase « soit c un chat, j'adopte c » est incorrecte[2].

Usage toléré. Soit $z = a + bi$ un nombre complexe, avec a et b dans $\mathbb{R}$.

Syntaxe correcte (mais un peu longue). Soit z un nombre complexe. **On dispose de** a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $z = a + b\mathrm{i}$.

Attention !
Il faut se méfier de la préposition « avec », son usage est bien trop vague. Mieux vaut donc l'éviter.

2. C'est une anacoluthe, c'est-à-dire une rupture syntaxique.

Exemple.

☒ Soit $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ avec $a \wedge b = 1$. Alors $au + bv = 1$ avec $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$.

✓ Soit $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$. Si $a \wedge b = 1$, alors il existe $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $au + bv = 1$.

En résumé

☒ ~~On note $x = 2$.~~	✓ On pose $x = 2$.
☒ ~~On note $x = 2$.~~	✓ On note x le nombre 2.
☒ ~~On pose x un réel.~~	✓ Soit x un réel. / Considérons un réel x.
☒ ~~On pose $x^2 = 2$.~~	✓ Soit x un nombre tel que $x^2 = 2$.

2 Rappels rapides de logique

2.1 Le symbole =

On l'a déjà signalé, il existe un même symbole = pour deux significations.

— L'affectation (notée = en Python, mais notée := dans d'autres langages).

Exemple. Posons $x = 2$.

— Le test booléen (noté == en Python).

Exemple. Si x est un réel tel que $x + 1 = 2$, alors $x = 2$.

RÈGLE ABSOLUE
Quand on écrit « A = B » on s'oblige à prendre le temps de se demander si A et B sont des objets mathématiques de même type.

Types d'objets mathématiques : ensembles[3], nombres, n-uplets de nombres, matrices, vecteurs, fonctions, matrices, polynômes, ...

Rares exceptions.

- L'écriture « $u_n \underset{n\to\infty}{=} o(v_n)$ » n'est pas une véritable égalité. L'écriture correcte théorique est
$$u \in o(v)$$
pour dire que la suite u appartient à l'ensemble des suites négligeables devant la suite v.

- En Probabilités, si $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire et si $a \in \mathbb{R}$, on note $(X = a)$ l'ensemble des antécédents de a par X, c'est-à-dire $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = a\}$. On constate que l'égalité entre X et a n'est pas correcte car elle met en jeu des objets de natures différentes.

3. En théorie, (presque) tout objet mathématique est un ensemble : les nombres, par exemple, sont des ensembles particuliers, mais le comprendre demande un bon niveau en Mathématiques.

2.2 Assertions et prédicats

en Logique classique, une *assertion* est une affirmation, qui peut être ou bien vraie, ou bien fausse. Par exemple, $1+3=6$ est une assertion, et elle est fausse. Tandis que les expressions

$$1+3\ , \qquad \mathrm{F}\oplus\mathrm{G}\ , \qquad x^2$$

ne sont pas des assertions. Ainsi, « $\mathrm{F}\oplus\mathrm{G}$ » ne signifie pas « F et G sont en somme directe ».

On appelle *prédicat*, toute assertion dépendant d'un ou plusieurs paramètres. Par exemple, on définit un prédicat en notant, pour chaque réel a, $\mathscr{P}(a)$ l'assertion « l'équation $x^2=a$, d'inconnue x, n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ ». Ainsi,
— l'assertion $\mathscr{A}(-1)$ est vraie
— l'assertion $\mathscr{A}(2)$ est fausse.

2.3 Les connecteurs logiques

On rappelle ici les connecteurs usuels de la Logique classique.

$\neg$: négation

$\vee$: disjonction (ou)	$\wedge$: conjonction (et)
$\Longrightarrow$: implication (si..., alors...)	$\Longleftrightarrow$: équivalence (ssi)

Ce **ne sont pas** des abréviations. Le symbole $\Longrightarrow$ **n'est pas un** une marque de début de paragraphe.

Le symbole $\Longrightarrow$ **ne veut pas dire** « donc ». Les Américains utilisent le symbole $\therefore$ comme connecteur « donc ». Exemple :
— $\mathscr{A}$: « j'ai gagné au loto »,
— $\mathscr{B}$: « je suis riche ».
Quelle est la différence entre $\mathscr{A} \Longrightarrow \mathscr{B}$ et $\mathscr{A} \therefore \mathscr{B}$?

En français, il est possible d'écrire « j'aime les maths, la musique et le sport ». En Mathématiques[4] **on est obligé de répéter**.
Exemple.
☒ Soit x un réel. Si $x^2=9$, alors $\cancel{x=3 \text{ ou } -3}$.
✓ Soit x un réel. Si $x^2=9$, alors $x=3$ ou $x=-3$.

Le *ou* mathématique, noté $\vee$, est inclusif. Ce n'est donc pas le *ou* de « fromage ou dessert » du restaurant, correspondant à *ou bien, ... ou bien*.

4. Comme en grec, en hébreu, en japonais...

2.4 Les lettres muettes

On rencontre des lettres muettes

— dans les quantificateurs : $[\forall x \in \mathrm{E},\ \mathscr{A}(x)] \equiv [\forall y \in \mathrm{E},\ \mathscr{A}(y)]$.

Exemple. L'assertion $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0$ peut se lire sans prononcer la lettre x : *le carré d'un nombre réel est toujours positif ou nul*. Cela montre bien que la lettre x est muette.

— Dans les intégrales : $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

— Dans les limites : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{k\to\infty} u_k$.

C'est pour cela que l'on parle de la limite de la suite u, tout court, notée $\lim u$.

— dans les fonctions : $(x \mapsto x^2) = (y \mapsto y^2)$: c'est la fonction (élévation au) carré.

— dans les opérateurs $\sum$, $\prod$, $\bigcup$, $\bigcap$ etc. : $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \sum\limits_{i=0}^{n} u_i$.

Il n'a donc **aucun sens** d'écrire

— ☒ $\cancel{\forall x \in \mathbb{R}}$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$. Sinon, on pourrait écrire (en prenant $x = 5$), « $\lim\limits_{5\to 1} f(5) = 0$ » (?!)

— ☒ $\cancel{\forall t \in [0,1]}$, $\int_0^1 t^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{3}$. Sinon, on pourrait écrire (en prenant $t = 1$), « $\int_0^1 1^2 \mathrm{d}1 = \frac{1}{3}$ » (?!)

— etc.

2.5 Les quantificateurs : quelques règles à respecter

Le Calcul des prédicats utilisé en logique mathématique utilise deux symboles (même si un seul suffirait en théorie) appelés *quantificateurs*, que vous connaissez déjà très bien. Nous rappelons ici les quelques règles régissant leur usage.

Rappelons au passage que l'écriture « $\forall x \in \mathrm{E}$ » est déjà une abréviation. L'écriture théoriquement correcte de

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0$$

est

$$(\forall x)(x \in \mathbb{R} \Longrightarrow x^2 \geqslant 0).$$

On comprend bien que l'on s'autorisera un minimum de souplesse pour que les assertions mathématiques restent lisibles.

Exemple. La définition de la convergence d'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers un réel ℓ s'écrit

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant \mathrm{N},\ |u_n - \ell| \leqslant \ell.$$

La syntaxe théoriquement correcte est cependant

$$(\forall \varepsilon)\Big(\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \Longrightarrow \Big[(\exists \mathrm{N})\big(\mathrm{N} \in \mathbb{N} \Longrightarrow [(\forall n) \Longrightarrow ([n \in \mathbb{N} \wedge n \geqslant \mathrm{N}] \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon)]\big)\Big]\Big).$$

Règle n° 1

Toute variable se quantifie.
Ce n'est pas parce qu'une lettre s'appelle n qu'il est sous-entendu que c'est un entier quelconque.

Exemple.
☒ Soit $f(x) = \ln(x)$.
✓ Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \ln(x)$.

☒ Un entier impair est un entier de la forme $2p+1$.
✓ Un entier impair est un entier n tel qu'il existe un entier p tel que $= 2p+1$.
✓ Un entier impair est un entier de la forme $2p+1$, où $p \in \mathbb{N}$.

☒ Pour montrer que la suite u est croissante on montre que $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.
✓ Pour montrer que la suite u est croissante on montre que $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ pour tout entier n.
✓ Pour montrer que la suite u est croissante on montre que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \geqslant 0.$$

☒ Résoudre $f'(x) = f(x)$.
On ne sait pas si la fonction f est donnée et que l'on doit trouver l'inconnue x, ou bien si c'est x qui est un réel donné, et que l'on doit doit trouver f, ou bien encore si l'on doit trouver f pour que l'égalité soit vraie pour tout x (c'est alors une équation différentielle).
✓ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ donnée. Résoudre $f'(x) = f(x)$, d'inconnue x à chercher dans $\mathbb{R}$.
✓ Soit x un réel donné. Déterminer toutes les fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f'(x) = f(x)$.
✓ Déterminer les fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(x).$$

✓ Résoudre $f' = f$ d'inconnue f à chercher dans $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (identique au point précédent).

Règle n° 2

Les symboles $\forall$ et $\exists$ **ne sont pas des abréviations** à employer dans des phrases non mathématiques. Ils s'utilisent dans des formules, en général dans des définitions ou des théorèmes, souvent centrées et **toujours sur une seule ligne** : on **ne coupe pas** une quantification sur deux lignes.

Exemple.
☒ On sait que $\exists x \in \mathbb{C}$ ~~tel que~~ $x^2 = -1$
✓ On sait qu'il existe x dans $\mathbb{C}$ tel que $x^2 = -1$.
✓ On sait qu'il existe un nombre complexe dont le carré vaut -1.
✓ On sait que $\exists x \in \mathbb{C},\ x^2 = -1$.
☒ On sait que $\cancel{\forall x \in \mathbb{R}}$,

$$x^2 \geqslant 0.$$

✓ On sait que $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0$.
✓ On sait que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0.$$

Règle n° 3

Les symboles $\forall$ et $\exists$ se placent toujours à **gauche** de l'assertion sur laquelle ils portent. Il y a cependant une tolérance en cas d'un seul quantificateur $\forall$.

Exemple.
☒ On sait que $\cancel{x^2 \geqslant 0,\ \forall x \in \mathbb{R}}$ (même si toléré).
✓ On sait que $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0$.
✓ On sait que $x^2 \geqslant 0$ pour tout réel x.

Règle n° 4

Les lettres qui suivent un quantificateur sont **muettes** : il n'a pas de sens de les utiliser en dehors de la quantification.

Exemple.
☒ On sait que $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0$, ~~donc~~ $\cancel{x^2 + 1 \geqslant 1}$.
✓ On sait que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0.$$

Si $x \in \mathbb{R}$, on peut donc dire que $x^2 + 1 \geqslant 0$.

☒ On sait que $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 = 2$ ~~et même que~~ $\cancel{x = \pm\sqrt{2}}$.
✓ On sait que

$$\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 = 2.$$

Si x est un réel tel que $x^2 = 2$, alors $x = \pm\sqrt{2}$.

Règle n° 5

La quantification $\exists$ peut se traduire en français autrement que par « il existe ».

La quantification $\forall$ peut se traduire en français autrement que par « pour tout » ou « quel que soit ».

Exemple. L'assertion $\exists z \in \mathbb{C},\ z^2 = -1$ peut se traduire par
- L'équation $z^2 = -1$ (d'inconnue z) **admet** au moins une solution dans $\mathbb{C}$.
- Dans $\mathbb{C}$, -1 **possède** au moins une racine carrée.
- **On peut trouver** des nombres complexes dont le carré vaut -1.
- **Il est possible**, dans $\mathbb{C}$, **d'écrire** -1 comme un carré.

Exemple. L'assertion $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0$ peut se traduire par
- Le carré de **n'importe quel** réel est positif ou nul.
- Le carré d'un réel est **toujours** positif ou nul.
- Dans $\mathbb{R}$, **on ne peut pas trouver** de carré strictement négatif.

Règle n° 6

Les écritures $\forall x^2$, $\exists f(x)$ ou $\exists 2 \in \mathbb{N}$ sont incorrectes. On quantifie une lettre libre, pas une expression.
De plus, l'écriture $\nexists x \in \mathrm{E}$ est incorrecte.

Exception pour les n-uplets : « $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ » est toléré et largement utilisé.

Exemple.
- **Tous les carrés** de réels sont positifs ou nuls : $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0$ (et non $\cancel{\forall x^2 \geqslant 0 \text{ si } x \in \mathbb{R}}$).
- Certaines valeurs de la fonction f sont positives : $\exists x \in \mathrm{D}_f,\ f(x) \geqslant 0$ (et non $\cancel{\exists f(x)}\ldots$).
- Le nombre 2 est un entier : $2 \in \mathbb{Z}$, ou $\exists n \in \mathbb{Z},\ n = 2$, mais c'est maladroit (et non $\cancel{\exists 2 \in \mathbb{Z}}$).
- **Il n'existe pas** de rationnel dont le carré vaut 2 : $\forall x \in \mathbb{Q},\ x^2 \neq 2$ (et non $\cancel{\nexists x \in \mathbb{Q}},\ x^2 = 2$).

Règle n° 7

Si l'on veut démontrer une assertion mathématique qui commence par « $\forall x \in \mathrm{E}$ », la démonstration doit **obligatoirement** commencer par « Soit x dans E » (ou « Soit $x \in \mathrm{E}$ »).

Exemple. Montrer que

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}^*}, \ \exists a \in \mathbb{C}, \ z = a^2.$$

$\boxed{\text{Soit } z \in \mathbb{C}^*}$. L'écriture exponentielle des nombres complexes nous permet de considérer r dans $\mathbb{R}_+^*$ et θ dans $\mathbb{R}$ tels que $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Si l'on pose $a = \sqrt{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$, on peut écrire, en vertu de la formule de Moivre (licite car $2 \in \mathbb{Z}$),

$$a^2 = \left(\sqrt{r}\right)^2 \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\right)^2 = r\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\frac{\theta}{2}} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = z.$$

Ainsi, on a bien montré l'existence d'un complexe a tel que $z = a^2$.

Rappel. La locution « soit » ne signifie pas « pour tout » : cf. page 19

ATTENTION !

La formule de Moivre $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{n\mathrm{i}\theta}$ n'a de sens (et n'est vraie) pour tout réel θ que lorsque $n \in \mathbb{Z}$.

Si vous en doutez, tentez avec $\theta = 2\pi$ et $n = \frac{1}{4}$...

3 Les types d'objets en mathématiques

3.1 Les ensembles

• Les ensembles sont les premiers objets mathématiques. Deux ensembles E et F sont égaux lorsqu'ils ont les mêmes éléments [5] :

$$(\mathrm{E} = \mathrm{F}) \Longleftrightarrow (\forall x, \ (x \in \mathrm{E}) \Longleftrightarrow (x \in \mathrm{F})),$$

ou encore (principe de double inclusion),

$$(\mathrm{E} = \mathrm{F}) \Longleftrightarrow [(\forall x \in \mathrm{E}, \ x \in \mathrm{F}) \wedge (\forall x \in \mathrm{F}, \ x \in \mathrm{E})].$$

Pour montrer que deux ensembles E et F sont égaux,
- ou bien on raisonne directement **par équivalence** (possible dans les cas simples).
- ou bien on procède **par double inclusion**.
  - Soit x dans E. Montrons que $x \in \mathrm{F}$. Dire $x \in \mathrm{E}$ c'est dire que [blabla].
  - Soit x dans F. Montrons que $x \in \mathrm{E}$. Puisque $x \in \mathrm{F}$, on peut dire que [blabla].

5. Cette affirmation constitue le tout premier axiome de la théorie des ensembles sur laquelle se fondent actuellement les Mathématiques. Il s'appelle *l'axiome d'extensionnalité*.

ATTENTION !
Il faut avoir compris que les ensembles $\varnothing$, $\{\varnothing\}$ et $\{\{\varnothing\}\}$ sont trois ensembles différents.

L'ensemble $\varnothing$ est l'ensemble vide : c'est un ensemble qui n'a aucun élément. Par exemple, on peut imaginer un sac de courses, mais avec rien à l'intérieur.

L'ensemble $\{\varnothing\}$ est un ensemble qui ne possède qu'un seul élément (on parle de *singleton*). Cet unique élément se trouve être $\varnothing$. On peut imaginer un sac de courses contenant lui-même un sac en plastique, ce dernier ne contenant rien.

L'ensemble $\{\{\varnothing\}\}$ est lui aussi un singleton. Mais son unique élément est $\{\varnothing\}$, qui n'est évidemment pas $\varnothing$, comme on l'a expliqué au-dessus. Ainsi, $\{\{\varnothing\}\} \neq \{\varnothing\}$ puisque ces ensembles n'ont pas les mêmes éléments.

ATTENTION !
Un ensemble peut tout à fait contenir des objets de natures différentes.

Par exemple, $\{\mathbb{R}, \sqrt{2}, x \mapsto x^2\}$ est un ensemble contenant trois éléments : l'ensemble des nombres réels, un nombre réel et une fonction. L'assemblage

$$(x \mapsto x^2) \in \{\mathbb{R}, \sqrt{2}, x \mapsto x^2\}$$

est tout à fait correcte, même s'il « fait bizarre [6] à lire ».

• Il y a deux façons d'écrire un ensemble : $\boxed{\text{en extension}}$, c'est-à-dire en dressant la liste complète de ses éléments, ou bien $\boxed{\text{en compréhension}}$, c'est-à-dire en disant que c'est l'ensemble des éléments d'un certain ensemble de référence à vérifier une propriété.

Exemple. L'ensemble des entiers pairs compris entre 0 et 10 peut s'écrire en extension :

$$\{0,2,4,6,8,10\} \qquad \text{ou bien} \qquad \{2k : k \in [\![0,5]\!]\},$$

ou bien en compréhension :

$$\{k \in \mathbb{N} \mid \exists p \in \mathbb{N},\ (k = 2p \wedge 2p \leqslant 10)\}.$$

La syntaxe générale pour une description en extension est

$$\{x \in \mathrm{E} \mid \mathscr{P}(x)\}$$

6. Concept non mathématique : un assemblage est correct ou non, et s'il est correct il est vrai ou faux.

où E est un ensemble bien identifié, et $\mathscr{P}$ un prédicat dépendant d'un élément de E. On utilise traditionnellement | pour la compréhension et : pour l'extension (cf. exemples précédents).

Remarque. En `Python`, l'écriture en extension est courante. Ici avec une liste :

```
>>> In : [2*k for k in range(6)]
# On rappelle que range(n) s'arrête à n-1
Out : [0, 2, 4, 6, 8, 10]
```

ATTENTION !

L'écriture suivante est totalement interdite.

$$\{\cancel{\forall x \in \mathbb{R}} \mid x^2 \geqslant 2\}.$$

Un quantificateur ne peut jamais être à cette place dans l'écriture d'un ensemble. L'ensemble *de tous les réels* dont le carré est supérieur ou égal à 2 est simplement l'ensemble des réels dont le carré est supérieur ou égal à 2. On écrit donc

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geqslant 2\}.$$

3.2 Les fonctions

Intuitivement[7], si E et F sont deux ensembles, une fonction de E dans F « consiste » à « associer » à certains éléments de E un, et un seul, élément de F. L'ensemble des éléments de E qui sont associés à un élément de F est appelé *ensemble de définition* de la fonction. Si x est dans l'ensemble de définition d'une fonction f, l'élément de F auquel il est associé se note $f(x)$. L'ensemble de toutes les images se note $\mathrm{Im}(f)$.

Exemple 1. Soit f la fonction qui à chaque élève x de la P2B 2025-2026 associe sa note au DS n° 1. On peut représenter la fonction f en numérotant les élèves de l'ensemble P2B : $x_1, x_2, \ldots, x_{32}$, et en plaçant tous les couples $(i, f(x_i))$ dans un repère. Cet ensemble de couple est donc une partie de P2B $\times [0,20]$: c'est le graphe de f.

Exemple 2. Soit f la fonction qui à chaque réel x associe son carré. On peut encore représenter la fonction f en plaçant tous les couples $(x, f(x))$ dans un repère : la courbe représentant le graphe de f est une parabole.

7. Remarquez comment cette définition est bancale : on ne dit pas **ce qu'est** une fonction, on se contente de dire en quoi elle « consiste ». On n'explique d'ailleurs pas ce que veut dire « associer ». Mathématiquement, ce n'est pas recevable.

Il est possible de définir rigoureusement la notion de fonction : faisons-le ici si cela n'a pas été fait en première année.

Définition

Soit E et F des ensembles. On appelle *fonction de* E *dans* F tout triplet

$$f = (\mathrm{E}, \mathrm{F}, \Gamma)$$

où Γ est une partie de $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$, appelée *graphe* de f, vérifiant la propriété suivante :

$$\forall x \in \mathrm{E},\ \forall y \in \mathrm{F},\ \forall y' \in \mathrm{F},\ \Big[\Big((x, y) \in \Gamma \wedge (x, y') \in \Gamma\Big) \Longrightarrow y = y'\Big].$$

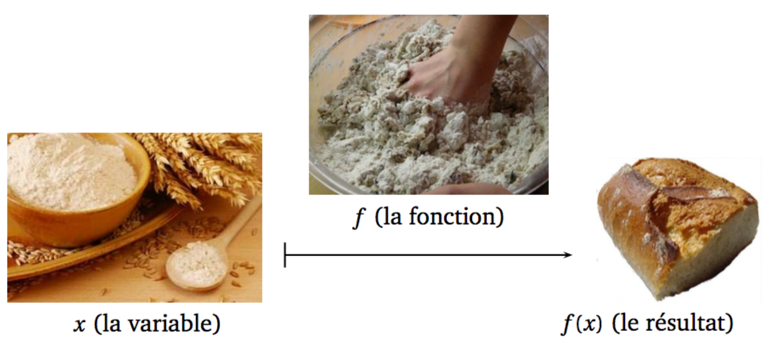
En conséquence, si $x \in \mathrm{E}$, il y a **au plus un** élément y de F tel que $(x, y) \in \Gamma$. S'il existe, cet unique élément y se note $f(x)$ et s'appelle *l'image* de x par la fonction f.

L'ensemble de définition de f est alors l'ensemble des éléments x de E qui possède une image par f : on le note D_f. Enfin, si $\mathrm{D}_f = \mathrm{E}$, on dit que la fonction f est une *application*.

Les fonctions forment donc un nouveau type d'objets mathématiques, à côté de celui d'objets bien connus : les nombres.

RÈGLE ABSOLUE
Il ne faut jamais confondre la fonction f et l'image $f(x)$.

Sur l'exemple illustré ci-après, la fonction est le boulanger : elle prend de la farine x, fait quelque chose (pétrir, cuire, etc.) et renvoie le résultat $f(x)$ qui est du pain. **Parler de « la fonction $f(x)$ » revient à dire des choses étranges telles que « le boulanger est trop cuit » ou « La baguette tradition m'a rendu la monnaie sur un billet de 10 euros ».**



☒ ~~La fonction x^2~~ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\cancel{(x^2)' = 2x}$.
☒ $\cancel{\cos(x)}$ est 2π-périodique.

✓ La fonction $x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est $x \mapsto 2x$.
✓ La fonction $x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(x \mapsto x^2)' = x \mapsto 2x$ (un peu lourd).
✓ Si l'on note f la fonction $x \mapsto x^2$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par $f'(x) = 2x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
✓ Si l'on pose $f = x \mapsto x^2$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = x \mapsto 2x$.
✓ La fonction cos est 2π-périodique (on évite de commencer une phrase par un symbole mathématique).

ATTENTION !
L'écriture $(X^2)' = 2X$ est tout à fait correcte dans l'algèbre $\mathbb{K}[X]$ des polynômes : il ne s'agit pas de fonctions, et $'$ ne désigne pas la dérivation habituelle !

3.3 Les suites, les familles

• Les suites sont des fonctions particulières : elles sont définies sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$ ou une partie de la forme $[\![n_0, +\infty[\![$. Les notations suivantes sont donc équivalentes.

— La suite u.
— La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (plus précise car donne l'ensemble de définition). Si le contexte est clair, l'écriture « (u_n) » est possible aussi.
— La suite $n \mapsto u_n$ (peu utilisée).

☒ La ~~suite u_n~~.
☒ ~~u_n est croissante~~ à partir du rang 3.
☒ ~~u_n converge~~.

Rappel : on évite le plus possible de commencer une phrase par un symbole mathématique.

✓ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $\mathbb{C}$.
✓ La suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est croissante.
✓ La suite (u_n) converge.

• Les familles généralisent les suites. Si I est un ensemble, on appelle *famille* indexée par I, toute application définie sur I. On retrouve donc les suites en prenant $I = \mathbb{N}$, ou $I = \mathbb{N}^*$, etc. On imite souvent la notion introduite pour les suites en écrivant

$$(x_i)_{i\in I}$$

une famille indexées par I.

3.4 D'autres types d'objets

• Les polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ (lettre désignant $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) sont des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ qui s'annulent à partir d'un certain rang (ce rang n'étant pas forcément le même d'une suite à l'autre). On parle aussi de suite presque nulle, ou bien de suite à support fini. En effet, le support d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'ensemble

$$\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\},$$

c'est-à-dire l'ensemble des entiers n tels a_n n'est pas nul. Le polynôme X est défini comme étant la suite

$$(0, 1, 0, 0, 0, 0, \ldots).$$

L'ensemble des polynômes se note $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$. On définit alors une addition et une multiplication : cf. cours de première année.

• Si n et p sont des entiers non nuls, on appelle matrice de format (n, p) à coefficients dans un ensemble E, toute application M de $[\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$ à valeurs dans E. On note fréquemment $[\mathrm{M}]_{i,j}$ ou $m_{i,j}$ au lieu de $\mathrm{M}(i, j)$. On représente souvent M par un tableau comme vous l'avez appris en première année : ce tableau n'est qu'une représentation de la matrice M, il ne faut donc pas croire qu'une matrice *est* un tableau ! D'ailleurs, on se demande bien comment serait défini mathématiquement la notion de « tableau » !

• De très rares objets ne sont pas des ensembles : il n'existe pas, par exemple, d'ensemble dont les éléments seraient *tous* les ensembles existants. On parle alors de *classe* de tous les ensembles.

4 Comment énoncer une définition

Ce sera mon combat en début d'année (et parfois jusqu'au bout avec certains qui refusent de comprendre). Partons d'un exemple non mathématique pour situer le problème. Si je vous demande ce qu'est un penalty au football, il n'est pas possible de répondre

> ☒ *Un penalty, ~~c'est quand~~ un joueur fait une faute grave et qu'il est dans la surface de réparation de son équipe.*

Premièrement, « c'est quand » est de registre familier. Ensuite, on ne sait toujours pas ce qu'est un penalty ; on sait quelle situation en provoque un, mais on ne sait pas si c'est un cri de joie, un chiffon de couleur, ou une girafe.

Vous faites cette erreur systématiquement en Mathématiques. Voici une définition (parmi d'autres) correcte d'un penalty.

✓ Un *penalty* $\boxed{\text{est une sanction}}$ infligée à l'équipe d'un joueur ayant commis une faute grave alors qu'il était dans la surface de réparation de sa propre équipe.

Maintenant, on sait ce qu'est un penalty : c'est avant tout une sanction. La suite de la définition explique dans quelles conditions cette sanction est infligée. On peut la continuer en précisant en quoi consiste la sanction, mais ce n'est pas le problème ici. En Mathématiques, il faut donc, de la même façon, annoncer **le type de l'objet** que l'on veut définir. Les types d'objets en Mathématiques sont assez limités :

— Les ensembles, qui, de façon théorique, constituent le seul type d'objet mathématique : presque tous les objets sont des ensembles plus ou moins déguisés. Oui, les nombres sont des ensembles plus ou moins sophistiqués.
— Les vecteurs.
— Les fonctions.
— Les matrices (qui sont des fonctions particulières).
— Les couples, les triplets, les n-uplets, les suites, les familles (qui sont des fonctions particulières).
— Les polynômes (qui sont des suites particulières).
— etc.

Il y a plusieurs façons d'énoncer une définition en Mathématiques. Les modèles suivants représentent l'écrasante majorité des cas rencontrés dans un cours : entraînez-vous à les reproduire.

On appelle [machin] tout [truc] qui vérifie [blabla].

On dit que [truc] est un [machin] quand [blabla].

On dit que [truc] est [machinable] lorsque [blabla].

Un [truc] est dit [machinable] lorsque [blabla].

On appelle [truc machinable] tout [truc] tel que [blabla].

Un [machin] est un [truc] qui possède la propriété [bidule].

ATTENTION !
On ne met pas de « si et seulement si » dans une définition : on réserve cela pour les théorèmes caractérisants.

Exemples.

- ☒ Une matrice nilpotente ~~c'est quand on a~~ $M^k = 0$.
- ☒ Une matrice nilpotente, ~~c'est par exemple quand~~ [...]
- ☒ ~~Pour moi~~, une matrice nilpotente ~~c'est quand~~ une puissance est nulle.
- ☒ C'est $M^k = 0$.

- ✓ Une matrice carrée est dite *nilpotente* quand une de ses puissances est nulle.
- ✓ On dit qu'une matrice carrée est *nilpotente* lorsque l'une de ses puissances est nulle.
- ✓ On appelle *matrice nilpotente* toute matrice carrée $\boxed{\text{dont}}$ une puissance est nulle.
- ✓ Soit M une matrice carrée. On dit que M est *nilpotente* s'il existe k dans $\mathbb{N}^*$ tel que $M^k = 0$.

Il faut bien distinguer les trois notions suivantes.

— La **définition** d'un objet : une phrase qui explique précisément et sans ambiguïté ce qu'est ledit[8] objet.

— Le **nom** de l'objet : c'est le mot qui permet de l'appeler. En aucun cas ce mot ne définit l'objet !

— La **notation** de l'objet : c'est le symbole qui désigne l'objet.

Exemple. Le conjugué d'un nombre complexe z.

— **définition** : c'est le nombre complexe qui a la même partie réelle que z, mais une partie imaginaire opposée à celle de z.

— **nom** : ce nombre est appelé *conjugué* de z.

— **notation** : on note ce nombre $\overline{z}$.

✓ **Définition correcte.** On appelle *conjugué* d'un nombre complexe z, le nombre complexe noté $\overline{z}$ égal à $\mathfrak{Re}(z) - i\mathfrak{Im}(z)$.

☒ **Définition incorrecte.** Le conjugué de z, c'est $\overline{z}$.

→ Qui est ce z au début de la phrase ? On doit deviner que c'est un nombre complexe ? Observer la différence avec la définition correcte.

→ On sait seulement comment on note le conjugué de z. On ne sait toujours pas comment il est défini. Avec cette définition, il est impossible de savoir ce que vaut $\overline{1+2i}$.

☒ **Définition incorrecte.** Le conjugué de z, c'est $\overline{z} = \mathfrak{Re}(z) - i\mathfrak{Im}(z)$.

→ Qui est ce z au début de la phrase ?

→ Où est la locution « On appelle » ou « On dit que » quasiment obligatoire dans une définition ?

8. En un seul mot, tout comme *lequel*.

5 Comment énoncer un théorème

Étymologies grecques (sachez lire un mot grec : il suffit de bien connaître l'alphabet !)

— τὸ θεώρημα : ce qu'on peut contempler, d'où spectacle, objet de méditation, d'où règle, principe.
Du verbe θεωρέω : contempler (même racine que θέατρον : le théâtre).

— ἡ θέσις : action de poser, d'instituer. D'où affirmation.
Du verbe τίθημι : poser.

— ὑπό : en dessous. Ainsi, hypothèse : ce qu'on pose en dessous, pour servir de fondement.

— τὸ λῆμμα : Tout ce qu'on prend ou reçoit, d'où l'une des prémisses d'un syllogisme, et par extension l'un des arguments d'une preuve.
Du verbe λαμβάνω : prendre.

Étymologies latines

— *probare* : essayer, examiner, vérifier, reconnaître. D'où preuve.

— *corolla* : petite couronne. D'où énoncé qui tourne autour du théorème précédent, donc une conséquence.

Un **théorème** est composé de trois parties :

1. La présentation des objets : on utilise « soit » (invariable) dans le sens de « considérons ». **Exemple.** Soit ABC un triangle.
2. Les hypothèses que l'on fait sur lesdits objets : on utilise « si » ou « supposons que ». **Exemple.** Si ABC est rectangle en A.
3. La ou les conclusion(s) : introduite(s) par « alors », ou tout autre mot conclusif. **Exemple.** Alors $BC^2 = BA^2 + AC^2$.

Parfois le théorème a un **nom** : ici le théorème de Pythagore.

Pour utiliser un théorème lors d'un exercice on doit : s'assurer que les objets concernés vérifient les hypothèses dudit théorème, et enfin, et seulement après ces vérifications, énoncer la conclusion en invoquant le nom du théorème s'il en a un à l'aide de « par », « grâce à » ou « en vertu de ».

Exemple. Énoncer la formule de Taylor avec reste intégral.

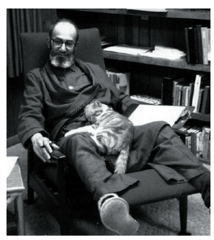
$$\boxtimes\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \mathrm{d}t.$$

→ Qui sont n, f, I, a, x ? (Les lettres k et t étant ici muettes, elles ne doivent pas être présentées).
→ La fonction f est-elle quelconque ? Doit-on deviner que I est un intervalle parce qu'il s'appelle I, ou que « habituellement » une fonction est définie sur un intervalle ?

✓ Soit I un intervalle de longueur non nulle, a un élément de I, n un entier naturel et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction. Si f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I, alors

$$\forall x \in \mathrm{I},\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \mathrm{d}t.$$

On ferme aujourd'hui une démonstration par le symbole □ ou ■ appelé *halmos*, du nom du mathématicien Paul Halmos (1916-2006).



C.Q.F.D. (ce qu'il fallait démontrer) est franchement démodé.

Q.E.D. (*quod erat demonstrandum*) est surtout utilisé aux États-Unis, mais pas en France. C'est la traduction latine de la locution grecque originelle ci-dessous.

O.E.Δ. (ὅπερ ἔδει δεῖξαι) était écrit la fin des démonstrations dans les Éléments d'Euclide (IIIe siècle av. J.-C.).

6 Les types de raisonnements

Utilité : démontrer une implication $\mathscr{A} \Longrightarrow \mathscr{B}$.

Principe : démontrer $\mathscr{A} \wedge \neg\mathscr{B} \Longrightarrow \mathscr{F}$ où $\mathscr{F} \equiv \mathscr{B} \wedge \neg\mathscr{B}$ est une assertion fausse. Ainsi, il faut supposer $\mathscr{A} \wedge \neg\mathscr{B}$ et orienter ses raisonnements afin de trouver une absurdité.

Rédaction recommandée :
Supposons $\mathscr{A}$. Imaginons un instant $\neg\mathscr{B}$.
[Faire des raisonnements.]
Conclure par : « c'est absurde. Ainsi, $\neg\mathscr{B}$ est fausse si bien que $\mathscr{B}$ est vraie. »

Exemple. Démontrer que $\frac{\ln(3)}{\ln(2)} \notin \mathbb{Q}$.

L'implication est cachée ici : $\forall x \in \mathbb{R}, \left[x = \frac{\ln(3)}{\ln(2)} \Longrightarrow x \notin \mathbb{Q}\right]$.

Soit x dans $\mathbb{R}$. Supposons que $x = \frac{\ln(3)}{\ln(2)}$. Imaginons un instant que $x \in \mathbb{Q}$. Puisque $x > 0$, on disposerait alors de deux entiers n et p dans $\mathbb{N}^*$ tels que $\frac{\ln(3)}{\ln(2)} = \frac{n}{p}$, si bien que $p\ln(3) = n\ln(2)$ c'est-à-dire $\ln(3^p) = \ln(2^n)$. En composant par exp on obtiendrait $3^p = 2^p$. Or 3^p est impair (car $p \in \mathbb{N}^*$) et 2^n est pair (car $n \in \mathbb{N}^*$), donc c'est absurde. En conclusion, $x \notin \mathbb{Q}$.

Rappel de vocabulaire. Si une implication $\mathscr{A} \Longrightarrow \mathscr{B}$ est vraie,
- l'assertion $\mathscr{A}$ s'appelle la prémisse ou condition **suffisante** : on dit qu'il *suffit* d'avoir $\mathscr{A}$ pour avoir $\mathscr{B}$.
- l'assertion $\mathscr{B}$ s'appelle la conclusion ou condition **nécessaire** : on dit que pour que $\mathscr{A}$ soit vraie il *faut* que $\mathscr{B}$ soit vraie.

En grammaire, $\mathscr{A}$ s'appelle la protase et $\mathscr{B}$ l'apodose. Par exemple dans la phrase « si je suis malade, je n'irai pas en cours », la proposition subordonnée « si je suis malade » est la protase, tandis que la proposition principale « je n'irai pas en cours » est l'apodose.

6.1 Par contraposée

Utilité : démontrer une implication $\mathscr{A} \Longrightarrow \mathscr{B}$.

Principe : démontrer $\neg\mathscr{B} \Longrightarrow \neg\mathscr{A}$.

Rédaction recommandée :
« Supposons $\neg\mathscr{B}$ ».
[Faire des raisonnements.]
Conclure par : « on a donc montré $\neg\mathscr{A}$ », et par contraposée, on a montré $\mathscr{A} \Longrightarrow \mathscr{B}$.

Exemple. Démontrer que pour tout entier naturel n, si n^2 est impair, alors n aussi. On cherche à démontrer l'implication

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; n^2 \in 2\mathbb{N}+1 \Longrightarrow n \in 2\mathbb{N}+1.$$

où $2\mathbb{N}+1$ désigne l'ensemble des nombres impairs.

Soit n dans $\mathbb{N}$. Supposons que n ne soit pas impair : il est donc pair. On dispose donc d'un entier p tel que $n = 2p$, si bien que $n^2 = 4p^2 = 2p'$ où $p' = 2p^2$. Puisque $p' \in \mathbb{N}$, n^2 est pair, c'est-à-dire n^2 n'est pas impair.

6.2 Par disjonction de cas

Exemple. Démontrer qu'il existe deux irrationnels strictement positifs a et b tels que a^b soit rationnel.

Considérons le réel $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ (défini comme étant $e^{\sqrt{2}\ln(\sqrt{2})}$). De deux choses l'une.

— Ou bien $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel, dans ce cas on pose $a = \sqrt{2}$ et $b = \sqrt{2}$ et on a gagné.

— Ou bien $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ n'est pas rationnel, dans ce cas on pose $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et $b = \sqrt{2}$ de sorte que

$$a^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2 \in \mathbb{Q}$$

et on a gagné.

Dans tous les cas on a montré l'existence demandée.

6.3 Par analyse-synthèse

Utilité : montrer l'existence (et parfois l'unicité) d'un objet dont on n'a aucune idée de la valeur.

C'est le raisonnement de l'inspecteur de police qui recherche les auteurs d'un crime. Dans **l'analyse**, il se dit : « si untel est le criminel, quelles caractéristiques peut-il avoir ? Est-ce un homme ? Est-il (ou elle) jeune ? Etc. » Une fois l'analyse terminée, il convoque les suspects, les candidats possibles et fait la **synthèse** : il vérifie un par un ces candidats pour savoir s'ils sont coupables ou non. Tout peut arriver : ne trouver qu'un seul criminel, en trouver plusieurs, en trouver finalement aucun (ce n'était donc pas un crime, mais un accident).

Analyse : on suppose trouvé un objet solution du problème. On passe en revue ce que doit vérifier cet objet. On conclut : si un tel objet existe, alors **nécessairement** (aNalyse - Nécessaire) ce ne peut être que ceci, ceci ou cela.

Synthèse : on passe au crible les candidats précédemment trouvés. On en élimine, ou on les garde tous. S'il n'en reste qu'un, on a prouvé l'unicité de la solution, mais ce n'est pas toujours le cas. Cette phase est l'étude des conditions Suffisantes (Synthèse) pour qu'un objet soit solution.

Exemple. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que toute matrice carrée M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire, de façon unique, comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

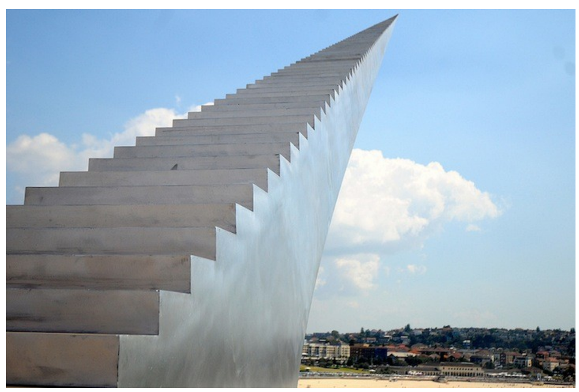
Analyse : supposons trouvées S symétrique et A antisymétrique telles que $M = S + A$. On aura alors $M^\top = S^\top + A^\top = S - A$. Ainsi, $M + M^\top = 2S$ et $M - M^\top = 2A$. En conclusion, si S et A existent, elles ne peuvent être égales qu'à $\frac{1}{2}(M + M^\top)$ et $\frac{1}{2}(M - M^\top)$ respectivement. Dit autrement, si elles existent bien, elles sont uniques.

Synthèse : posons $S = \frac{1}{2}(M + M^\top)$ et $A = \frac{1}{2}(M - M^\top)$. On a alors
— $S^\top = \frac{1}{2}(M^\top + (M^\top)^\top) = \frac{1}{2}(M^\top + M) = S$, donc S est symétrique.
— $A^\top = \frac{1}{2}(M^\top - (M^\top)^\top) = \frac{1}{2}(M^\top - M) = -A$, donc A est antisymétrique.
— $S + A = \frac{1}{2}(M + M^\top) + \frac{1}{2}(M - M^\top) = M$.

En conclusion, il existe un unique couple (S, A) de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ tel que $M = S + A$.

6.4 Par récurrence

Le raisonnement par récurrence permet de démontrer en une seule fois une infinité de propositions.



Il repose sur le principe suivant, que l'on admet [9].

Principe de récurrence

Soit A une partie de $\mathbb{N}$. Si les deux conditions suivantes sont vraies.
— $0 \in \mathbb{N}$,
— $\forall n \in \mathbb{N}, \left[n \in A \Longrightarrow n + 1 \in A \right]$,
alors $A = \mathbb{N}$.

Intuitivement : si l'on sait monter sur la première marche d'un escalier (la marche n° 0) et si l'on sait monter une marche dès lors qu'on a réussi à monter sur la précédente, alors on sait gravir tout l'escalier. Si l'escalier possède un

9. Il résulte immédiatement d'un axiome de la théorie des ensembles : *l'axiome de l'infini*, et de la construction de $\mathbb{N}$ (hors programme).

nombre fini de marches, ce fait est banal. L'intérêt du principe de récurrence est qu'il est vrai pour un escalier infini !

On applique généralement ce principe de récurrence pour démontrer qu'une infinité de propositions $\mathscr{P}_n$, paramétrées par un entier naturel, sont vraies. Il existe différentes variantes qui ont leur utilité propre dans des situations différentes.

La récurrence simple consiste à appliquer le principe de récurrence à l'ensemble

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid \mathscr{P}_n\}.$$

La rédaction recommandée est la suivante.

— Pour chaque n dans $\mathbb{N}$, expliquer ce que l'on note $\mathscr{P}_n$.
— Initialisation : montrer $\mathscr{P}_0$. En général c'est assez facile.
— Hérédité : « Soit n dans $\mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}_n$ ». On s'évertue alors à montrer $\mathscr{P}_{n+1}$.

La récurrence double consiste à appliquer le principe de récurrence à l'ensemble

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid \mathscr{P}_n \wedge \mathscr{P}_{n+1}\}.$$

Elle est utilisée pour démontrer des propriétés concernant des suites définies par des relations de récurrence d'ordre 2. La rédaction recommandée est la suivante.

— Pour chaque n dans $\mathbb{N}$, expliquer ce que l'on note $\mathscr{P}_n$.
— Initialisation : montrer $\mathscr{P}_0$ et $\mathscr{P}_1$. En général c'est assez facile.
— Hérédité : « Soit n dans $\mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}_n$ et $\mathscr{P}_{n+1}$ ». On s'évertue alors à montrer $\mathscr{P}_{n+2}$.

La récurrence forte consiste à appliquer le principe de récurrence à l'ensemble

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid \mathscr{P}_1 \wedge \mathscr{P}_2 \wedge \ldots \wedge \mathscr{P}_n\}.$$

Elle est utilisée quand les types précédents de récurrences sont inopérants, c'est-à-dire quand, pour montrer $\mathscr{P}_n$, on a besoin d'avoir montré $\mathscr{P}_k$ avec $k < n$ (mais on ne sait pas lequel !).

— Pour chaque n dans $\mathbb{N}$, expliquer ce que l'on note $\mathscr{P}_n$.
— Initialisation : montrer $\mathscr{P}_0$. En général c'est assez facile.
— Hérédité : « Soit n dans $\mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}_k$ pour tout $k \leqslant n$ ». On s'évertue alors à montrer $\mathscr{P}_{n+1}$.

7 Exercices d'entraînement

EXERCICE 2.1 *Des lettres grecques (rappel).*

— Lire les lettres grecques : ζ, ω, η, χ, ϑ, ς.
— Lire les lettres grecques : Ψ, Γ, Λ, Ξ, Φ.
— Comment écrit-on delta minuscule ? Sigma minuscule ? Khi et ksi minuscules ?
— Lire le nom de ces mathématiciens grecs : Θαλῆς, Πυθάγορας.

EXERCICE 2.2 *Dans les phrases suivantes, les symboles mathématiques ont été mal employés. Les corriger.*

1. L'ensemble de tous les réels positifs est $\{\forall x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$.
2. On sait que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 \geqslant 0$.
3. On sait que dans $\mathbb{C}$, $\exists z,\ z^2 = -1$. Par exemple, $z = \mathrm{i}$.
4. On sait que $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 = 3$.
5. La fonction f est paire quand $f(-x) = f(x)\ \forall x \in \mathrm{D}_f$.
6. Puisque $x + 1 = 2 \Longrightarrow x = 1$.
7. La fonction est paire,
   $\Longrightarrow$ on l'étudie seulement sur $\mathbb{R}_+$.
8. cos est paire $\wedge$ périodique.
9. La fonction $x \to x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
10. $\lim\limits_{x \longmapsto 0} f(x) = 1$.
11. la fonction carré est $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$.

EXERCICE 2.3 *Corriger la syntaxe mathématique des phrases suivantes.*

1. La fonction x^2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(x^2)' = 2x$.
2. La fonction $\cos(x)$ est périodique.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, f est croissante.
4. La suite u_n est croissante.
5. On considère la droite d'équation $2x + 3$.
6. Pour résoudre $x^2 + x + = 0$, on calcule le Δ.

EXERCICE 2.4 *Expliquer les non-sens mathématiques dans les phrases suivantes. Les rectifier.*

1. Pour tout $\mathrm{i} \in \mathbb{C}$, on a $\mathrm{i}^2 = -1$.

2. Il existe i dans $\mathbb{C}$ tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.
3. Pour tout x dans $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.
4. $\forall x > 0$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.
5. Pour tout $t \in [0,1]$, $\displaystyle\int_0^1 t^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{3}$.
6. Pour tous $k, n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
7. Pour tout réel $x \geqslant 0$, $f(x)$ est continue.
8. Pour tout réel $x \geqslant 0$, f est croissante en x.

EXERCICE 2.5 Dans l'expressions suivante,

$$t \longmapsto \sum_{k=0}^{n} \int_k^{k+1} \cos(x+t+a)\, \mathrm{d}x,$$

quelles sont les lettres muettes, les paramètres et les symboles réservés (qui ne sont ni muets, ni des paramètres).

EXERCICE 2.6 Expliquer la différence entre $\mathbb{R}[\mathrm{X}]^2$ et $\mathbb{R}^2[\mathrm{X}]$. En particulier, si un élève veut considérer deux polynômes réels P et Q et écrit

$$\text{« Soit } (\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathbb{R}^2[\mathrm{X}] \text{ »,}$$

expliquer pourquoi c'est incorrect.

EXERCICE 2.7 *Corriger les phrases suivantes.*

1. Soit $\mathrm{P} = 1 + \mathrm{X} + \mathrm{X}^2$ un polynôme.
2. Soit $1 + \mathrm{X} + \mathrm{X}^2$ un polynôme.
3. Notons $\mathrm{P} = 1 + \mathrm{X} + \mathrm{X}^2$.
4. Posons P un polynôme.
5. Posons $1 + \mathrm{X} + \mathrm{X}^2$.

EXERCICE 2.8 Un élève veut écrire formellement l'ensemble de tous les réels dont l'exponentielle est strictement plus grande que 2. Il écrit **incorrectement**

$$\{\forall x \in \mathbb{R} \mid \mathrm{e}^x > 2\}.$$

1. Expliquer son erreur et proposer une écriture correcte.
2. Écrire cet ensemble sous forme d'un intervalle.

EXERCICE 2.9 *Dans les phrases suivantes, un élève introduit des lettres sans les présenter. Rectifier ce manquement.*

1. Soit z un nombre complexe que l'on écrit $z = a + b\mathrm{i}$.
2. Une matrice 2×2 à coefficients dans $\mathbb{R}$ peut se représenter par $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
3. On veut résoudre $x^2 + x + 1 = 0$ dans $\mathbb{R}$. On a $\Delta = b^2 - 4ac = -3$, donc il n'y a pas de solution.
4. Soit n^3 le cube d'un entier.

EXERCICE 2.10 Un élève souhaite démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $6^n - 1$ est un multiple de 5. Il écrit :

> Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété « $\forall n \in \mathbb{N},\ 6^n - 1$ est un multiple de 5 ».
>
> $\mathscr{P}_0$ est vraie car $6^0 - 1 = 0$ et 0 est bien un multiple de 5.
>
> (...)

Expliquer pourquoi sa rédaction est incorrecte.

EXERCICE 2.11 Un élève veut résoudre l'équation $\ln(x) + \ln(x+1) = \ln(2)$. Pour cela, il écrit :

$$\begin{aligned} \ln(x) + \ln(x+1) = \ln(2) &\Longleftrightarrow \ln(x(x+1)) = \ln(2) \\ &\Longleftrightarrow x(x+1) = 2 \\ &\Longleftrightarrow x^2 + x - 2 = 0. \end{aligned}$$

Il résout alors $x^2 + x - 2 = 0$ en calculant le discriminant $\Delta = 1^2 - \times 1 \times (-2) = 9$, et trouve deux solutions : $\frac{-1-3}{2} = -2$ et $\frac{-1+3}{2} = 1$. Et il se dit : « mince alors, c'est impossible : -2 ne convient pas car $\ln(-2)$ n'existe pas ! ».

Expliquer l'erreur logique de cet élève.

EXERCICE 2.12 Expliquer tout ce qui ne va pas dans cette tentative d'énoncer le théorème du rang.

> Le théorème du rang c'est quand $\dim \mathrm{E} = \dim \operatorname{Ker}(f) + \dim \operatorname{Im}(f)$ avec f une application linéaire.

EXERCICE 2.13 Expliquer tout ce qui ne va pas dans cette tentative d'énoncer la définition d'une fonction paire.

> Une fonction paire, c'est $f(-x) = f(x)$.

EXERCICE 2.14 Énoncer les théorèmes suivants vus en première année en respectant la présentation des objets, la présentation des hypothèses et celle de la conclusion.

1. Le théorème du rang.
2. Le théorème de Rolle.
3. Le théorème des valeurs intermédiaires.
4. Le théorème des accroissements finis.
5. L'inégalité des accroissements finis.
6. La formule de Grassmann donnant la dimension de la somme de deux sous-espaces vectoriels.
7. La formule d'intégration par parties.

Vérifier ensuite vos réponses avec votre cours de première année.

EXERCICE 2.15 Énoncer les définitions suivantes vues en première année en respectant la syntaxe imposée dans ce cours.

1. Quand dit-on qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable en un point a ?
2. Quand dit-on qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante sur une partie D ?
3. Quand dit-on qu'une matrice carrée est antisymétrique ?

EXERCICE 2.16 *Utiliser les quantificateurs* $\forall$ *et* $\exists$ *pour décrire les situations suivantes.*

1. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante.
2. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est majorée.
3. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ prend ses valeurs entre 2 et 3.
4. L'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[0, +\infty[$.
5. Tout réel est compris entre deux entiers (relatifs) consécutifs, l'encadrement étant large à gauche et strict à droite.
6. Tout réel positif admet une racine carrée (remarque : l'écriture « $\exists\sqrt{x}$ » est incorrecte).
7. Le carré d'un nombre rationnel ne peut jamais faire 2.
8. L'entier 13 est un nombre premier.

EXERCICE 2.17 *Écrire les ensembles suivants en extension, puis en compréhension.*

1. L'ensemble des diviseurs positifs de 12.
2. L'ensemble des réels dont le carré vaut 2.

3. L'ensemble des réels dont le carré vaut -1.
4. l'ensemble des nombres premiers inférieurs à 20.
5. L'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, égales à leur propre dérivées.

— *Un peu de calcul* —

EXERCICE 2.18 Après avoir utilisé des opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes, simplifier le plus possible le déterminant suivant.

$$\begin{vmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 & m \end{vmatrix}.$$

EXERCICE 2.19 Soit α un réel.

1. Déterminer toutes les primitives de $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ sur $]0,+\infty[$. *On devra distinguer le cas $\alpha = 1$.*
2. En déduire les valeurs de α pour lesquelles $\int_1^{\mathrm{A}} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ tend vers une limite finie quand $\mathrm{A} \to +\infty$.
3. En déduire aussi les valeurs de α pour lesquelles $\int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ tend vers une limite finie quand $\varepsilon \to 0^+$.

EXERCICE 2.20 Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction

$$x \longmapsto \frac{x}{x^2+x+1}.$$

Indication : on essaiera de faire apparaître la forme $\frac{u'}{u}$ dans un premier temps. Ensuite, il faudra mettre x^2+x+1 sous forme canonique et savoir trouver une primitive de $x \mapsto \frac{1}{(x+a)^2+c^2}$.

EXERCICE 2.21 À l'aide d'une intégration par parties, calculer

$$\int_0^{\mathrm{A}} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

pour tout réel A, puis déterminer la limite de cette intégrale quand $\mathrm{A} \to +\infty$.

EXERCICE 2.22

1. Démontrer que $\tan' = 1+\tan^2$, et en déduire la valeur de

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

2. À l'aide d'un changement du variable $t = \tan(\theta)$, calculer

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^3(\theta)\ \mathrm{d}\theta.$$

Indication : on devra savoir faire la division euclidienne de X^3 par X^2+1, puis savoir intégrer $x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$.

EXERCICE 2.23 Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose

$$I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^n}\ e^{\frac{1}{x}}\ \mathrm{d}x.$$

1. Calculer I_2.
2. Expliquer pourquoi pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout réel x dans $[1,2]$,

$$0 \leqslant \frac{1}{x^n}\ e^{\frac{1}{x}} \leqslant \frac{e}{x^n}.$$

3. En déduire un encadrement de I_n, puis étudier la convergence de la suite (I_n).

EXERCICE 2.24 Donner un équivalent de $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ quand $n \to +\infty$.

EXERCICE 2.25 Rappeler les développements limités en 0 à l'ordre 5 de

$$e^x\ , \qquad \ln(1+x)\ , \qquad \cos(x)\ , \qquad \sin(x)\ , \qquad (1+x)^\alpha,$$

où α est une constante. En déduire celui de $\cos(x)e^{-x}$.

EXERCICE 2.26 Pour chaque entier naturel non nul n, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

1. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. En étudiant les variations sur $[0,1]$ des fonctions

$$f : x \longmapsto e^{-x}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n}\right) \quad \text{et} \quad g : x \longmapsto f(x) + \frac{x^n}{n!},$$

démontrer que $e - \frac{e}{n!} < S_n < e$. En déduire la convergence de (S_n) et sa limite.

2. On considère alors la suite (T_n) où $T_n = S_n + \frac{1}{n \cdot n!}$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n < e < T_n.$$

3. En déduire que $\mathrm{e} \notin \mathbb{Q}$. Sans calculatrice, déterminer une valeur approchée e à 10^{-2} près.

EXERCICE 2.27 On lance deux fois une pièce de monnaie équilibrée. On considère les événements suivants.

- A : « On obtient pile au 1^{er} lancer ».
- B : « On obtient face au 2^{e} lancer ».
- C : « On obtient la même chose aux deux lancers ».

Montrer que $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ sont deux à deux indépendants, mais pas mutuellement indépendants.

EXERCICE 2.28 On considère qu'une année comporte 365 jours. On suppose que les dates d'anniversaires sont équiprobables (ce qui est faux dans la pratique, mais cela permet de simplifier le problème).

1. Dans une classe de 35 élèves, quelle est la probabilité pour que deux élèves soient nés le même jour ?
2. Combien une classe doit-elle comporter d'élèves pour que cette probabilité dépasse 90 % ?

EXERCICE 2.29 Soit P une probabilité sur un univers fini Ω, et soit $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ trois événements. Montrer que $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B} \cup \mathrm{C})$ est égal à

$$\begin{gathered}\mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B}) + \mathrm{P}(\mathrm{C}) \\ -\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) - \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{C}) - \mathrm{P}(\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) \\ +\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{C}).\end{gathered}$$

EXERCICE 2.30 Soit $a \in \mathbb{R}$. Grâce à un équivalent, trouver $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$.

Méthode : quand un exposant « varie », comme ici, on repasse par la forme exponentielle, $a^b = \mathrm{e}^{b \ln(a)}$.

Étape

3 UN PEU DE Python

EXERCICE 3.1 Calculer $1^3+2^3+3^3+\ldots+500^3$ et vérifier que cela vaut

$$(1+2+3+\ldots+500)^2.$$

Rappel. Pour tester si deux entiers sont égaux, on utilise ==.

EXERCICE 3.2 *(Nombres d'Armstrong).* Un *nombre d'Armstrong* est un entier naturel non nul qui est égal à la somme des cubes des chiffres qui composent son écriture en base 10. Par exemple 153 est un nombre d'Armstrong car $153 = 1^3+5^3+3^3$.
Trouver tous les nombres d'Armstrong inférieurs à 10 000.
Rappel. `str`(153) *renvoie la chaîne de caractère* `'153'`

EXERCICE 3.3 *(La suite de Syracuse).* Programmer (avec la commande `def`) la célèbre suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par un premier terme u_0 choisi dans $\mathbb{N}$, et pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}u_n & \text{si } u_n \text{ est pair,} \\ 3u_n+1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On fera en sorte que u_n soit toujours du type `int`*, et jamais du type* `float`.

1. Observer sur quelques exemples que quelle que soit la valeur de u_0 choisie, il existe un entier n_0 tel que $u_{n_0} = 1$.
2. Trouver le plus petit entier n_0 convenant si $u_0 = 15$: cet entier s'appelle *la longueur du vol de 15*. On le note $v(15)$.
3. Tracer un graphique représentant les points de coordonnées $(n, v(n))$ quand n parcourt $[\![1,100]\!]$.

EXERCICE 3.4 *(Attracteur de Sierpiński)*. Voici un algorithme permettant de tracer un ensemble de points du plan.

- Construire un triangle équilatéral ABC, de centre O.
- Placer un point M_0 arbitraire à l'intérieur de ABC.
- Soit n dans $\mathbb{N}$. Si le point M_n est placé, alors
  - choisir au hasard l'un des sommets S du triangle ABC.
  - placer le point M_{n+1} comme étant le milieu du segment $[M_n S]$.

Tracer les points M_n quand $n \in [\![0, 2000]\!]$.

EXERCICE 3.5 *(L'énigme de Bérangère)*. Bérangère (professeur d'EPS et néanmoins amie) me dit : « tiens le matheux, je parie que tu ne peux même pas trouver 26 en utilisant 2, 3, 4, 5 et les quatre opérations $+$, $-$, $\times$ et $\div$, mais sans utiliser deux fois le même truc [nombre ou opération, je traduis] mais en utilisant vraiment les quatre chiffres ! »

Donner tort à cette médisante sportive en écrivant un programme `Python` qui :

- trouve le résultat sous une forme de chaîne de caractères, par exemple :

  `'(((2 + 3) × 4 ) - 5)'`

  (qui n'est évidemment pas la solution),
- trouve toutes les solutions possibles, en convenant que `(((3 + 2) × 4 ) - 5)` et `(((2 + 3) × 4 ) - 5)` désignent la même solution.
- renvoie en plus le nombre de solutions au problème.

Clouer définitivement le bec de Bérangère en calculant le temps de calcul.

EXERCICE 3.6 *(Nombres de Lychrel, sujet de rattrapage 2025 en P2B)*. Si n est un entier naturel non nul dont l'écriture en base 10 est $\overline{a_d a_{d-1} \dots a_1 a_0}$, on note $R(n)$ l'entier dont l'écriture en base 10 est $\overline{a_0 a_1 \dots a_{d-1} a_d}$: c'est le *renversé* de n.

Exemple 1. Si $n = 1984$, alors $R(n) = 4891$.

Exemple 2. Si $n = 1980$, alors $R(n) = 891$ car l'écriture 0891 n'est pas correcte.

Exemple 3. Si $n = 10000$, alors $R(n) = 1$ pour la même raison.

Définition 1

On dit qu'un entier naturel non nul n est un *palindrome* ou qu'il est *palindromique* quand $n = R(n)$.

Exemple. Les entiers 23632 et 7887 sont des palindromes, mais 23631 n'en est pas un.

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'entier $P_1(n) = n + R(n)$: si ce dernier n'est pas un palindrome, on pose $P_2(n) = P_1(n) + R(P_1(n))$. On recommence ce procédé autant de fois que nécessaire.

Exemple. Soit $n = 1687$. On calcule successivement :
— $P_1(n) = 1687 + 7861 = 9548$.
— $P_2(n) = 9548 + 8459 = 18007$.
— $P_3(n) = 18007 + 70081 = \boxed{88088}$.

On s'est aperçu, empiriquement, que pour chaque entier naturel non nul n, il existait un certain entier k_0 tel que $P_{k_0}(n)$ est palindromique. Par exemple, si $n = 1687$, $k_0 = 3$.

Définition 2
Un entier naturel non nul n est appelé *nombre de Lychrel* quand la suite $(P_k(n))_{k\in\mathbb{N}^*}$ est infinie, autrement dit quand il n'existe aucun entier k tel que $P_k(n)$ soit palindromique.

À ce jour, on ne connaît aucun nombre de Lychrel, mais il semblerait que le plus petit d'entre eux soit 196.

Conjecture *(de Lychrel)*
L'entier 196 est un nombre de Lychrel.

1. Écrire une fonction `R(n)` renvoyant le retourné de l'entier n.

2. Écrire une fonction `palin(n)` renvoyant `True` si n est un palindrome, et `False` sinon.

3. Écrire une fonction `lychrel(n)` renvoyant la liste, de longueur limitée à 100 pour éviter les boucles infinies (notamment si $n = 196$ comme le stipule la conjecture de Lychrel)

$$[n, P_1(n), P_2(n), \dots, P_{k_0}(n)]$$

avec les notations présentées ci-dessus. Par exemple, si l'on avait un ordinateur à disposition, on devrait obtenir le résultat suivant pour $n = 1984$:

```
>>> lychrel(1984)

[1984,
 6875,
 12661,
 29282,
 57574,
 105149,
 1046650,
 1613051,
 3116212,
 5242325,
 10474750,
 16222151,
 31344412,
 52788725]
```

ce qui prouve que 1984 n'est pas un nombre de Lychrel.

4. Proposer une méthode permettant de trouver probablement un nombre de Lychrel.

   Les premiers nombres de Lychrel sont possiblement 196, 295, 394, 493, 592, 689, ... mais aucune démonstration n'a pu à ce jour établir leur statut.

Remarque. Le nom *Lychrel* est (presque) l'anagramme de Cheryl, prénom de la fiancée du mathématicien amateur Wade VanLandingham.