INFORMATIQUE PSI-P2B

Année 2025/26

**T.P. n° 6**

*Transformée de Fourier et filtrage*

## Table des matières




Vincent Rohart

# 1 La théorie en bref

## 1.1 Transformée de Fourier

$\mathbb{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des fonctions (continues par morceaux) intégrables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire les fonctions $f$ telles que $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\mathrm{d}t < \infty$. On notera aussi $\mathscr{B}_c(\mathbb{R},\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

**Définition .**

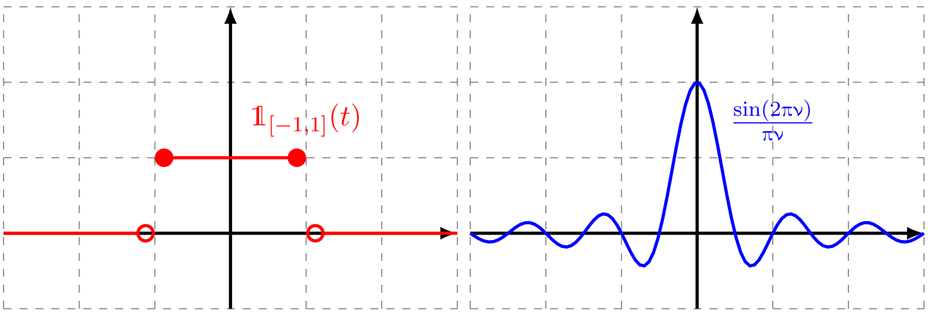
Si $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$, on note $\hat{f}$, ou parfois $\mathscr{F}(f)$, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall \nu \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\nu t}\mathrm{d}t.$$

C'est la *transformée de Fourier* de $f$. De plus,
- — la fonction $f$ est souvent appelée *signal*. Sa variable est un temps $t$ (en seconde).
- — la fonction $\hat{f}$ s'appelle alors le *spectre* de $f$. Sa variable est une fréquence $\nu$ (en Herz).

**Remarque 1.** Il existe d'autres définitions possibles pour la transformée de Fourier. Chacune a ses avantages et ses inconvénients.

**Remarque 2.** La fonction $\hat{f}$ peut se voir comme une « somme continue » de fonctions périodiques de toutes les fréquences possibles (les $t \mapsto \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\nu t}$, qui sont de fréquence $\nu$, c'est-à-dire de période $\mathrm{T} = \frac{1}{\nu}$) pondérées par les valeurs de $f$. Une bonne interprétation géométrique nécessiterait de parler de produit scalaire complexe (hors programme).




*Fonction « porte » et sa transformée de Fourier : un sinus cardinal.*

**Remarque 3.** Si $f$ est un signal lumineux, on peut observer $|\hat{f}|^2$ sur un écran grâce à un système optique adéquat (lentille...).

**Théorème 1** *(propriétés basiques de la TF).*

1. Si $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$, alors $\hat{f}$ est une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$.
2. Si $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$, alors $\lim\limits_{\pm\infty} \hat{f} = 0$ (lemme de Riemann-Lebesgue).
3. L'application $f \mapsto \hat{f}$ est linéaire et 1-lipschitzienne de $(\mathbb{L}^1, \|\cdot\|_1)$ dans $(\mathscr{B}_c, \|\cdot\|_\infty)$.
4. Soit $k$ un entier naturel.
   (a) Si $f$ est telle que $t \mapsto t^k f(t)$ est intégrable, alors $\hat{f}$ est de classe $\mathscr{C}^k$ : plus $f$ tend vite vers 0, plus $\hat{f}$ est régulière.
   (b) Inversement, si $f$ est de classe $\mathscr{C}^k$ et dans $\mathbb{L}^1$, alors $\hat{f}(\nu) = o_{\pm\infty}(\frac{1}{\nu^k})$ : plus $f$ est régulière, plus $\hat{f}$ tend vite vers 0.

**Théorème 2** *(inversion de Fourier).*
Soit $f$ dans $\mathbb{L}^1$. Si $\hat{f} \in \mathbb{L}^1$, alors

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu)\mathrm{e}^{+2\mathrm{i}\pi\nu t}\mathrm{d}\nu.$$

Le spectre de $f$ permet donc de reconstituer le signal initial $f$.

**Remarque 4.** La transformée de Fourier se généralise aux fonctions de plusieurs variables réelles. On pose alors,

$$\forall\vec{\nu} \in \mathbb{R}^n, \quad \hat{f}(\vec{\nu}) = \int\cdots\int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{t})\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\langle\vec{t},\vec{\nu}\rangle}\mathrm{d}\vec{t}$$

où $\langle\vec{t},\vec{\nu}\rangle = t_1\nu_1 + \ldots + t_n\nu_n$ est le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$.

**Théorème 3** *(Plancherel).*
Soit $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C}) \cap \mathbb{L}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Si $\hat{f} \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C}) \cap \mathbb{L}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$, alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\nu)|^2\mathrm{d}\nu.$$

Autrement dit, $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$ : la transformée de Fourier est une isométrie linéaire (i.e. préserve les normes).

**Remarque 5.** On démontre que $\mathbb{L}^1 \cap \mathbb{L}^2$ est dense dans $(\mathbb{L}^2, \|\cdot\|_2)$. Ceci permet d'étendre la transformée de Fourier à l'espace $\mathbb{L}^2$ et l'on démontre alors que ce prolongement est défini par

$$\forall f \in \mathbb{L}^2, \forall\nu \in \mathbb{R},\ \hat{f}(\nu) = \lim_{\mathrm{A}\to+\infty} \int_{-\mathrm{A}}^{+\mathrm{A}} f(t)^{-2\mathrm{i}\pi\nu t}\mathrm{d}t.$$

Toutefois, le cadre idéal de la transformée de Fourier est celui des *distributions tempérées*, objets mathématiques qui généralisent les fonctions, et modélisent bien mieux les phénomènes ponctuels de la Physique.

## 1.2 Le produit de convolution

**Définition .**

Si $f$ et $g$ sont dans $\mathbb{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$, on pose, quand cela a un sens,

$$(f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\mathrm{d}t.$$

La fonction $f \star g$ s'appelle la *convolée* de $f$ par $g$. L'opération $\star$ s'appelle le produit de convolution.

On peut démontrer que $f \star g$ est définie « presque partout » sur $\mathbb{R}$.

**Remarque 1.** Le produit de convolution est la version continue du produit des polynômes ou des séries entières :

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i\mathrm{X}^i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} b_j\mathrm{X}^j = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\mathrm{X}^n \quad \text{avec } c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

**Remarque 2.** On interprète $(f \star g)(x)$ en disant que c'est une moyenne mobile centrée en $x$ de $f$ pondérée par les valeurs de $g$.

☆ **Théorème .**

1. Le produit de convolution est commutatif : $f \star g = g \star f$.
2. Le produit de convolution est associatif : $(f \star g) \star h = f \star (g \star h)$.
3. Le produit de convolution est bilinéaire.
4. La TF transforme les convolutions en produits ordinaires, et inversement :

$$\widehat{f \star g} = \hat{f} \cdot \hat{g} \qquad \text{et} \qquad \widehat{f \cdot g} = \hat{f} \star \hat{g}.$$

**Remarque 3.** Le produit de convolution ne possède pas d'élément neutre. Toutefois, la convolution s'étend à un ensemble plus vaste que celui des fonctions (l'espace des distributions), et dans cet ensemble la convolution possède un élément neutre : la *distribution de Dirac* $\delta_0$.

On peut approcher $\delta_0$ par une fonction $f$ nulle sauf sur $[-\varepsilon, \varepsilon]$ où elle fait un pic centré en 0, de sorte que $\int_{\mathbb{R}} f = 1$. Une telle fonction s'appelle une *impulsion*. Elle approche d'autant mieux $\delta_0$ que $\varepsilon$ est petit.

**Remarque 4.** Le produit de convolution sert à modéliser les systèmes électroniques linéaires :

$$\text{signal d'entrée } f \longrightarrow \boxed{- \star \mathrm{S}} \longrightarrow \text{signal de sortie } f \star \mathrm{S}.$$

**Forme discrète du produit de convolution.** Si $f$ et $g$ sont discrétiser par des listes de valeurs $(f_n)$ et $(g_n)$ (où $n$ parcourt $[\![0, \mathrm{N}-1]\!]$), on posera

$$(f \star g)_n = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} f_k g_{n-k}.$$

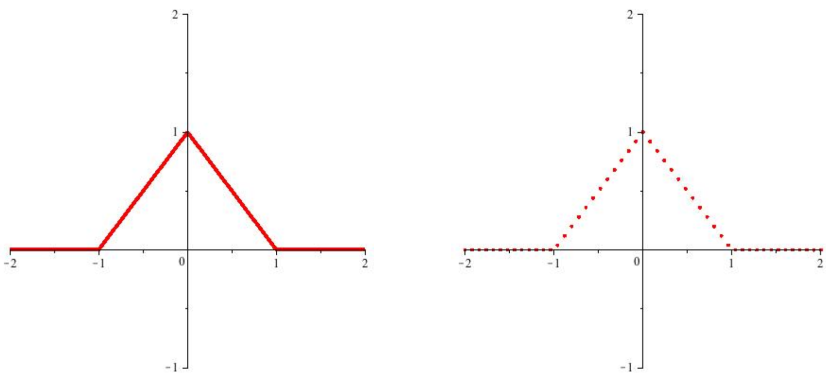
## 1.3 Transformées de Fourier discrète et rapide

Il est évidemment délicat de demander à un ordinateur de calculer une intégrale, et pire encore quand elle s'étend de $-\infty$ à $+\infty$.

Aussi pense-t-on à discrétiser le signal $f$ défini sur un intervalle de longueur T, en se donnant une liste de ses valeurs espacées d'un intervalle

$$\Delta t = \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{N}}$$

(où $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$ est assez grand pour que les valeurs soient suffisamment resserrées).



*Fonction « triangle » et une de ses discrétisations (N=50).*

**Forme discrète de la transformée de Fourier.** Si $f$ est rapportée à N valeurs discrètes, on pose

$$\forall k \in \left[-\frac{\mathrm{N}}{2}, \frac{\mathrm{N}}{2} - 1\right], \quad \hat{f}_k = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} f_n \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi \frac{kn}{\mathrm{N}}}.$$

Comme N est grand en pratique, on s'arrange pour le prendre pair.

On démontre alors que la formule d'inversion de Fourier discrète s'écrit

$$\forall n \in [0, \mathrm{N}-1], \quad f_n = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{k=-\frac{\mathrm{N}}{2}}^{\frac{\mathrm{N}}{2}-1} \hat{f}_k \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi \frac{kn}{\mathrm{N}}}.$$

La transformée de Fourier rapide (*Fast Fourier Transform* FFT) n'est autre qu'une méthode numérique performante pour programmer la transformée de Fourier discrète.

### 1.4 Bibliothèques à importer

- `numpy` renommée `np`
- `scipy` renommée `sp`
- `matplotlib.pyplot` renommée `plt`

Les fonctions utilisées seront

- `L_Ff = sp.fft(L)` pour la transformée de Fourier rapide de la liste $\mathrm{L} = [f_0, \dots, f_{\mathrm{N}-1}]$ représentant les valeurs discrètes de $f$.
- `L_f = sp.ifft(L)` pour la transformée de Fourier (rapide) inverse.
- `f_conv_g = sp.convolve(f_n,g_n)` pour le produit de convolution discret.

**Mise en garde liée à Python.** En pratique, avec les notations de ce cours,

$$\hat{f}(\nu_k) = \Delta t \hat{f}_k \quad \text{et} \quad f(t_n) = \frac{1}{\Delta t} f_n$$

avec $\Delta t = \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{N}}$. Aussi, quand on programmera une convolution discrète en relation avec les transformée directe ou inverse de Fourier, on n'oubliera pas de multiplier $f_n$ par $\frac{1}{\Delta t}$ et $\hat{f}_k$ par $\Delta t$.

## 2 Questions du T.P.

*Il pourra être utile de créer une liste à* N *éléments contenant que des 0, vus comme des nombres complexes :*

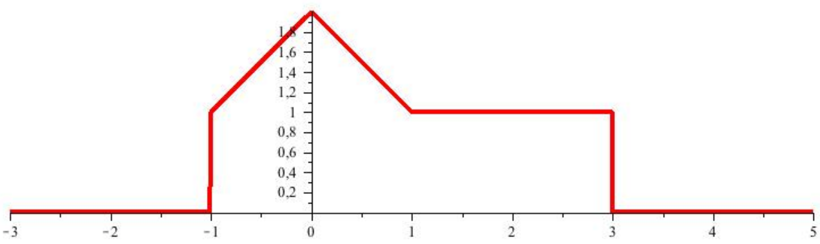
`np.zeros(N,dtype=complex)`

1. Programmer une fonction « triangle » $f$ comme représentée page 4.

2. En déduire une fonction $f_\varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$ qui soit une impulsion, afin d'approcher la distribution de Dirac $\delta_0$.

3. Représenter $f_\varepsilon$ pour $\varepsilon \in \{2^{-k} \mid k \in [\![1, 6]\!]\}$.

4. Programmer une fonction $g$ (comme grange) dont la représentation graphique est la suivante.




5. Programmer la convolée $f_\varepsilon \star g$ et mettre en évidence que plus $\varepsilon$ tend vers 0 , plus $f_\varepsilon \star g$ tend vers $g$.

6. Calculer la transformée de Fourier (= le spectre) de la fonction « triangle » $f$ et représenter le module de ce spectre.

7. Augmenter la discrétisation de la fonction $f$ en prenant $\mathrm{N} \in \{512, 1024, 2048, 4096\}$ (représenter le module des spectres correspondants sur un même graphique).

8. Représenter les spectres précédents dans la bonne indexation des indices $k$ : on parle de spectre redressé. En effet, on rappelle que Python calcule $\hat{f}_k$ avec $k \in \left[-\frac{\mathrm{N}}{2}, \frac{\mathrm{N}}{2} - 1\right]$ **en mettant les valeurs négatives de $k$ en fin de liste**. Autrement dit, $\hat{f}_k$ sera en position $k + \mathrm{N}$ dans la liste représentant le spectre.

9. Mettre en évidence, toujours avec la fonction $f$, la formule d'inversion de Fourier. Autrement dit, calculer la TF du spectre de $f$, et comparer graphiquement avec $f$. On prendra encore $\mathrm{N} \in \{512, 1024, 2048, 4096\}$.