INFORMATIQUE PSI P2B

Année 2024/25

TP n° 4 (noté)
groupe 2

Les fichiers, au format `.py`, seront nommés `NOM_DE_FAMILLE-TP4.py` et seront envoyés 5 min avant la fin de l'heure à tpinforohart@gmail.com

Le sujet comporte deux exercices.

Vincent Rohart
`http://vrohart.e-monsite.com/`

Exercice 1 — Traitement de texte

Écrire une fonction `cesar(M)` qui prend une chaîne de caractères `M` en argument et qui renvoie la chaîne de caractères `M'` obtenue par translation de trois lettres : A → D.

On prendra soin de
— ne pas transformer les caractères qui ne sont pas des lettres de l'alphabet : les espaces, `', !, ., ?`, etc.
— laisser une lettre majuscule en majuscule.
— ne pas oublier qu'il y a un cycle modulo 26 : Z → C.

Par exemple, si `M=Vous avez l'heure ?`, alors `cesar(M)` sera la chaîne `Yrxv dyhc o'khxuh ?`.

Fonctions utiles : `chr` et `ord`.

Exercice 2 — Analyse numérique

Le module `scipy.integrate` et sa méthode `quad` permettent de calculer des intégrales de façon approchée : `quad(f,a,b)` renvoie une valeur approchée de $\int_a^b f$ et une majoration de l'erreur de cette approximation.

1. En utilisant cette fonction `quad`, donner une valeur approchée de $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$. Quelle est sa valeur exacte ?

   On admet que pour tout polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$ et tous réels $a < b$,

   $$\frac{1}{b-a}\int_a^b \mathrm{P}(t)\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{P}(a)+4\mathrm{P}(c)+\mathrm{P}(b)}{6},$$

   où $c = \frac{a+b}{2}$. C'est *la formule des trois niveaux*. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction quelconque, on pose alors

   $$\mathrm{I}(f) = (b-a) \times \frac{f(a)+4f(c)+f(b)}{6}.$$

2. Ici $f = x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$. Calculer, avec Python, l'erreur commise en approchant $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ par $\mathrm{I}(f)$.
3. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on décide de découper $[0,1]$ en n parties égales : $[x_k, x_{k+1}]$ où $x_k = \frac{k}{n}$, $k \in [\![0,n]\!]$ et d'approcher $\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\mathrm{d}t$ par $\mathrm{I}(f|_{[x_k,x_{k+1}]})$.

   Créer une fonction de signature `simpson(f,n)` qui prend une fonction f et un entier n et qui renvoie le flottant

   $$\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{I}(f|_{[x_k,x_{k+1}]}).$$

4. Ici encore $f = x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$. Tracer un graphique représentant la suite $n \mapsto$ `simpson(f,n)`, pour $n \in [\![1,20]\!]$.

5. Comparer cette méthode avec celle du module `scipy.integrate` : quelle est la valeur minimale de n pour atteindre le même niveau de précision que `scipy.integrate`.

   La méthode de Monte-Carlo est une méthode probabiliste pour calculer des intégrales, simples ou multiples, de fonctions de classe quelconque (par exemple seulement continue). En contrepartie, elle converge souvent très lentement.

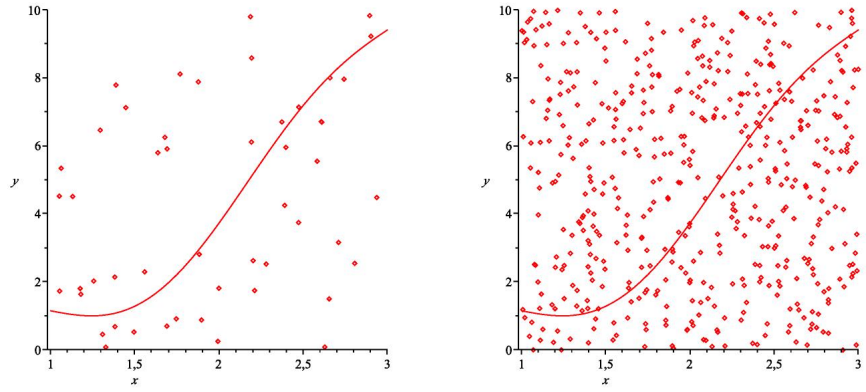

FIGURE 1 – Méthode de MONTE-CARLO pour $f : x \mapsto \sin(3x) + x^2$ sur $[1; 3]$ avec 50, puis 500 points.

Considérons une fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, supposée positive, et majorée par M. Le nombre $\int_a^b f$ représente l'aire d'un certain domaine D du plan contenu dans le rectangle $[a, b] \times [0, \mathrm{M}]$.

Si l'on place « au hasard » (de façon uniforme) des points $\mathrm{M}_i(x_i, y_i)$ avec $x_i \in [a, b]$ et $y_i \in [0, \mathrm{M}]$, la probabilité pour que M_i soit dans le domaine D est le rapport de l'aire de D par celle du rectangle $[a, b] \times [0, \mathrm{M}]$, soit

$$p = \frac{1}{\mathrm{M} \cdot (b - a)} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

La probabilité p peut quant à elle s'évaluer en comptant le nombre de points M_i qui sont dans D grâce à la relation

$$\mathrm{M}_i \in \mathrm{D} \iff y_i < f(x_i).$$

6. Implémenter une fonction `mc(f,a,b,M,n)` qui renvoie une approximation de $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, quand f est positive et majorée par M.
7. Tester la fonction pour le calcul de $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$. Trouver le plus petit n pour que `mc(f,a,b,M,n)` $\approx \int_0^1 x^2\mathrm{d}x$ à 10^{-3} près.

Fonction utile : `uniform` à importer du module `random`. Par exemple, `random.uniform(3,5)` renvoie un flottant choisi « au hasard » (uniformément) entre 3 et 5.