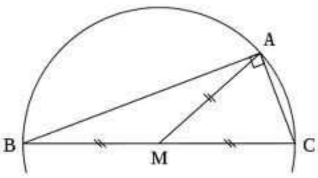
Les théorèmes à noms en PTSI

*Avec une * : les théorèmes hors-programme que vous n'êtes pas censés savoir, et qu'on ne peut donc pas utiliser lors de la résolution d'un problème (écrit ou oral).*

Théorème d'Apollonius (300 av. J.-C.) (ou de la médiane, ou du parallélogramme). Dans un triangle ABC, si M est le milieu de $[BC]$, alors $AB^2 + AC^2 = 2(BM^2 + MA^2)$.



Propriété d'Archimède (300 av. J.-C.). Soient a, b deux réels strictement positifs, avec $a < b$. Il existe un entier n tel que $na > b$.

Inégalité de Bernoulli (1689). Pour tout réel $x > -1$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, $(1+x)^n > 1+nx$. (Conséquence : si $q > 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$).

Théorème* de Bachet-Bézout (1624). Deux entiers a et b sont premiers entre eux (*i.e.* $\text{pgcd}(a, b) = 1$) si et seulement s'il existe des entiers p et q tel que $ap + bq = 1$.

TVI de Bolzano (1817). Si f est continue sur $[a, b]$ et que $f(a)f(b) < 0$ alors f s'annule sur $[a, b]$.
Variante. L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Théorème* de Bolzano-Weierstrass (1830). De toute suite réelle bornée on peut extraire une sous-suite convergente.

Théorème* de Cantor (1891). Il n'existe pas de surjection d'un ensemble E dans $\mathscr{P}(E)$ (conséquence : il n'y a pas d'ensemble de tous les ensembles).

Théorème* de Cauchy-Lipschitz (1820) (version linéaire). Les solutions d'une EDL homogène d'ordre n est un espace vectoriel de dimension n. Il n'y a qu'une seule solution φ telle que $\varphi(t_0), \varphi'(t_0), \ldots, \varphi^{n-1}(t_0)$ soient fixés à l'avance (pour un t_0 donné).

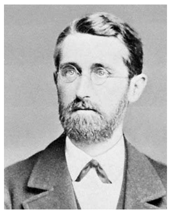
Inégalité de Cauchy-Schwarz (1821). Pour tous x, y dans un espace euclidien : $|(x|y)| \leqslant \|x\|.\|y\|$, avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Théorème* de Cayley. Tout groupe possédant n éléments est isomorphe à un sous-groupe du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$.

Théorème de d'Alembert-Gauss. Dans $\mathbb{C}$, tous les polynômes sont scindés.
Autrement dit, tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant admet une racine dans $\mathbb{C}$.

Théorème* de Darboux (1875). Si f est dérivable sur un intervalle I, alors $f'(I)$ est un intervalle (en conséquence, une fonction dérivée ne peut pas avoir de «sauts»).

Théorème de Dedekind (ou de la convergence monotone) Toute suite réelle croissante majorée converge.
En conséquence, toute suite réelle décroissante minorée converge.



Théorème d'Euclide (300 av. J.-C.) Il existe une infinité de nombres premiers.

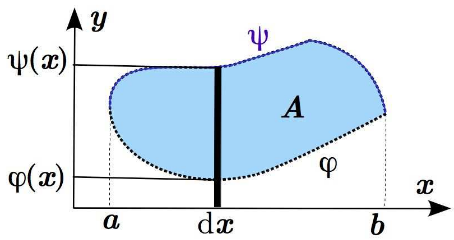
Formules d'Euler (1748). $\cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ et $\sin(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$.

Formules de Frenet (1852). $\dfrac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} = \gamma \vec{N}$ et $\dfrac{\mathrm{d}\vec{N}}{\mathrm{d}s} = -\gamma \vec{T}$.

Théorème de Fubini (1907). Si f est continue sur $A \subset \mathbb{R}^2$ alors :

$$\iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

où $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ a \leqslant x \leqslant b \ et \ \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)\}$.



Théorème* de Abel-Ruffini-Galois (début du XIXème). A partir du degré 5, il n'y a pas de formules générales exprimant les racines d'une équation polynomiale à l'aide de radicaux.

Lemme* de Gauss. Si a et b sont premiers entre eux et si a divise bc alors a divise c.

Procédé de Gram-Schmidt (1883). Toute famille libre d'un espace euclidien peut être orthonormalisée.

Formule de Grassmann (milieu du XIXème). Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie alors :

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

Formule de Green-Riemann (1828). $\displaystyle\oint_{\partial A^+} \vec{V}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

Formule de Green-Ostrogradski. $\displaystyle\oiint_{\Sigma^+} \vec{V}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}\sigma} = \iiint_{\mathscr{V}} \mathrm{div}\vec{V}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$

Théorème* de Hermite (1873). e est transcendent.

Théorème* de Hermite-Lindemann (1882). π est transcendent.

Identité de Jacobi. $\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w}) + \vec{v}\wedge(\vec{w}\wedge\vec{u}) + \vec{w}\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v}) = \vec{0}.$

Théorème d'Al-Kashi. Dans un triangle ABC quelconque, $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2.AB.AC.\cos(\hat{B})$.

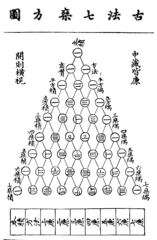
Identité de Lagrange. $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|^2 + (\vec{u}|\vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2.\|\vec{v}\|^2.$

Formule de Leibniz. $\displaystyle\frac{\mathrm{d}^n(fg)}{\mathrm{d}x^n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}\frac{\mathrm{d}^{n-k}g}{\mathrm{d}x^{n-k}}.$

Inégalité de Minkowski (ou triangulaire). $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|.$

Formule de De Moivre. si $n\in\mathbb{Z}$, et $\theta\in\mathbb{R}$: $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

Formule du binôme de Newton. Dans tout anneau où $ab = ba$, $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$, pour tout $n\in\mathbb{N}$.



Relation de Pascal. $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$.

Crible de Poincaré. $\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B)$.

Lemme de Poincaré. Soit $\vec{V} = (P, Q)$ un champ de vecteurs de classe C^1 sur un ouvert étoilé $U \subset \mathbb{R}^2$. Si $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ alors $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire, *i.e.* il existe $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tel que $\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}} f$.

Théorème de Pythagore. Dans un espace euclidien, u et v sont orthogonaux si et seulement si $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

Théorème des sommes de Riemann. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue par morceau alors $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + \frac{b-a}{n} k)$ tend vers $\int_{[a,b]} f$ quand n tend vers $+\infty$.

Théorème de représentation de Riesz. Si E est un espace euclidien, toute forme linéaire φ s'écrit $\varphi = (\cdot|v)$ pour un $v \in E$ unique.

Théorème de Rolle (1691). Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème de Schwarz (1873). Si $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe C^2 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Formule de Stokes-Ampère. $\displaystyle\oint_{\partial\Sigma^+} \vec{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \iint_{\Sigma^+} \mathrm{rot}\vec{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\sigma}$.

Formule de Taylor. Si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ et $a \in \mathbb{K}$, $\displaystyle P = \sum_{k=0}^{n} \frac{\tilde{P}^{(k)}(a)}{k!} (X-a)^k$.

Formule de Taylor-Young. Si f est n fois dérivable au voisinage de $a \in \mathbb{R}$, $\displaystyle f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o_a((x-a)^n)$.

Formule de Taylor-reste intégral. Si f est C^{n+1} sur $[a, b]$, et $x \in [a, b]$ alors $\displaystyle f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n \mathrm{d}t$.

Inégalité de Taylor-Lagrange. Si f est C^{n+1} sur $[a, b]$, et $x \in [a, b]$ alors $\displaystyle \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| \leqslant \frac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$ où $\displaystyle M = \sup_{[a,b]} |f^{(n+1)}|$.