Structures algébriques

les indispensables, et les autres

Evariste Galois
1811 - 1832

Evariste Galois, mort à 21 ans, découvrit la structure de groupe lors de l'étude des quantités invariantes lors de la permutation des racines d'un polynôme (par exemple leur somme, ou leur produit). Cela lui permit de démontrer que pour $n \geqslant 5$, il n'y a pas de formule générale donnant les solutions d'une équation de degré n.

Les termes *groupe, anneau, corps* viennent de l'allemand Gruppe, Ring, Körpe qui sont du même champ lexical que le terme *ensemble* : un *groupe* de personnes, le *cercle* des nageurs de Marseille, le *corps* enseignant. Ils datent du début du xxème siècle.

1 Lois internes

Nom	Forme	Définition	Exemples
Loi interne sur un ensemble E	$+, \times, \star$ $\oplus, \top, \perp$	Application de $E \times E$ dans E	$+, \times, -, \circ, \wedge, \cup, \cap$, ppcm, pgcd
Loi interne associative		Loi interne $\star$ sur E telle que $x \star (y \star z) = (x \star y) \star z$ pour tous x, y, z dans E	$-$ et $\wedge$ ne sont pas associatives
Loi interne commutative		Loi interne $\star$ sur E telle que $x \star y = y \star x$ pour tous x, y dans E	$-$, $\circ$ et $\wedge$ ne sont pas commutatives
Elément neutre d'une loi interne $\star$		Elément $e \in E$ tel que $x \star e = e \star x$ pour tout x dans E	0 pour $+$, 1 pour $\times$, Id pour $\circ$
Elément absorbant d'une loi interne $\star$		Elément $a \in E$ tel que $x \star a = a \star x = a$ pour tout $x \in E$	0 pour $\times$
Elément symétrique d'un $x \in E$	x^{-1}	Elément $y \in E$ tel que $x \star y = y \star x = e$	$-x$ pour $+$, $\frac{1}{x}$ pour $\times$
Elément simplifiable		Elément $x \in E$ tel que, pour tous $y, z \in E$: $x \star y = x \star z \Longrightarrow y = z$ et aussi $y \star x = z \star x \Longrightarrow y = z$	Dans $(\mathbb{N}, +)$ tous les éléments sont simplifiables
Distributivité d'une loi $\times$ sur une loi $\top$		$x \star (y \top z) = (x \star y) \top (x \star z)$ et de même $(y \top z) \star x = (y \star x) \top (z \star x)$	$\times$ sur $+$, $\cap$ sur $\cup$, $\cup$ sur $\cap$

2 Groupes, anneaux, corps

Nom	Forme	Définition	Exemples
Groupe	$(G, \star)$	Ensemble non vide, muni d'une loi interne associative, ayant un élément neutre, et dont tous les éléments admettent un symétrique.	$(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R}^*, \times)$, $(\mathbb{U}, \times)$, $(\overrightarrow{\mathscr{P}}, +)$, $(\mathfrak{S}_n, \circ)$, $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$
Groupe abélien	$(G, \star)$	Groupe dont la loi interne est commutative	$(\mathfrak{S}_n, \circ)$ n'est pas abélien si $n > 2$.

Nom	**Forme**	**Définition**	**Exemples**
Anneau	$(A, +, \times)$	Groupe abélien $(A, +)$ muni d'une loi interne $\times$, associative, possédant un neutre et distributive sur $+$.	$(\mathbb{Z}, +, \times)$, $(\mathbb{R}[X], +, \times)$, $(\mathscr{F}(D, \mathbb{R}), +, \times)$, $(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), +, \times)$
Anneau commutatif	$(A, +, \times)$	Anneau avec $\times$ commutative	$\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ n'est pas commutatif
Anneau intègre	$(A, +, \times)$	Anneau commutatif tel que $a \times b = 0$ implique $a = 0$ ou $b = 0$.	$\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}[X]$ sont intègres mais pas $\mathscr{F}(D, \mathbb{R})$ ni $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$
Corps	$(K, +, \times)$	Anneau commutatif, non réduit à $\{0\}$, tel que tout élément non nul soit inversible	$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}(X)$ (fractions rationnelles) mais pas $\mathbb{Z}$, ni $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, ni $\mathscr{F}(D, \mathbb{R})$

3 Algèbre linéaire

Nom	**Forme**	**Définition**	**Exemples**
Espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$	$(E, +, .)$	Groupe abélien $(E, +)$ muni d'une loi externe $. : \mathbb{K} \times E \to E$ vérifiant, pour tous $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$: $\begin{aligned} 1.x &= x \\ (\lambda + \mu).x &= (\lambda.x) + (\mu.x) \\ \lambda.(x + y) &= (\lambda.x) + (\lambda.y) \\ (\lambda \times \mu).x &= \lambda.(\mu.x) \end{aligned}$	$\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$, $\mathscr{C}^k([a, b], \mathbb{R})$
Application linéaire		Application $f : E \to F$ avec E et F des $\mathbb{K}$-ev, telle que $f(x + \lambda.y) = f(x) + \lambda.f(y)$, pour tous x, y dans E et $\lambda \in \mathbb{K}$	Il y a de quoi écrire ici !
Forme linéaire		Application linéaire $f : E \to \mathbb{K}$	La trace, l'intégrale
Espace dual	E^*	Ensemble des formes linéaires sur E	
Noyau d'une application linéaire $f : E \to F$	$\mathrm{Ker}(f)$	Ensemble des $x \in E$ tels que $f(x) = 0_F$	
Image d'une application linéaire $f : E \to F$	$\mathrm{Im}(f)$	Ensemble des $y \in F$ pouvant s'écrire $f(x)$ pour un certain $x \in E$	
Algèbre sur un corps $\mathbb{K}$	$(A, +, \times, .)$	$(A, +, \times)$ est un anneau, $(A, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et en plus, pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x, y \in A$: $\lambda.(x \times y) = (\lambda.x) \times y = x \times (\lambda.y)$	$\mathbb{R}[X]$, $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathscr{L}(E)$

4 Morphismes

Nom	**Forme**	**Définition**	**Exemples**
Morphisme de groupes		Application $f : G \to H$ avec $(G, \star)$ et $(H, \top)$ des groupes, telle que $f(x \star y) = f(x) \top f(y)$ pour tous x, y dans G.	$\theta \mapsto e^{i\theta}$, $z \mapsto e^z$, $z \mapsto \|z\|$
Morphisme d'anneaux		Application $f : A \to B$ avec $(A, +, \times)$ et $(B, +, \times)$ des anneaux, telle que $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $f(x \times y) = f(x) \times f(y)$ pour tous x, y dans A et aussi $f(1_A) = 1_B$.	
Morphisme de corps		Morphisme d'anneaux entre deux corps	$z \mapsto \overline{z}$
Isomorphisme		Morphisme bijectif	
Endomorphisme		Morphisme de E dans E	
Automorphisme		Endomorphisme bijectif	

5 Géométrie affine

Nom	Forme	Définition	Exemples
Espace affine	$(\mathscr{E}, E, \Phi)$	Ensemble $\mathscr{E}$, muni d'un $\mathbb{K}$-ev E et d'une application $\Phi : \mathscr{E}^2 \to E$ vérifiant : $\Phi(A,B) + \Phi(B,C) = \Phi(A,C)$; $\Phi(A,\cdot) : \mathscr{E} \to E$ est une bijection. On note $\Phi(A,B) = \overrightarrow{AB}$ et $E = \overrightarrow{\mathscr{E}}$.	Tout $\mathbb{K}$-ev E est un espace affine en posant $\Phi(A,B) = B - A$.
Application affine		Application $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ entre deux espaces affines telle qu'il existe $\varphi : \overrightarrow{\mathscr{E}} \to \overrightarrow{\mathscr{F}}$ linéaire avec : $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \varphi(\overrightarrow{AB})$ pour tous A, B dans $\mathscr{E}$. On note $\varphi = \vec{f}$	
Forme affine		Application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathbb{K}$	

6 Algèbre quadratique

Nom	Forme	Définition	Exemples
Application bilinéaire $f : E \times F \to G$		Application linéaire par rapport à chacune de ses deux variables	
Forme bilinéaire		Application bilinéaire à valeurs dans $\mathbb{K}$	
Forme bilinéaire symétrique sur E		Forme bilinéaire sur $E \times E$ telle que $f(x,y) = f(y,x)$ pour tous x, y dans E.	
Forme quadratique		application $x \mapsto f(x,x)$ avec f une forme bilinéaire symétrique sur E.	
Espace préhilbertien réel	$(E, +, ., \varphi)$	Espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni d'un produit scalaire, *i.e.* une forme bilinéaire symétrique définie-positive.	$\mathscr{C}([a,b], \mathbb{R})$ muni de $\varphi(f,g) = \int_{[a,b]} fg$
Espace euclidien	$(E, +, ., \varphi)$	Espace préhilbertien réel de dimension finie $n > 0$.	$\mathbb{R}^n$ muni de $\varphi(x,y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$
Endomorphisme orthogonal		Endomorphisme d'un espace préhilbertien réel conservant le produit scalaire *i.e.* $(f(x) \mid f(y)) = (x \mid y)$ pour tous $x, y \in E$.	Rotations vectorielles, Réflexions vectorielles
Isométrie		Application $f : E \to F$ entre deux préhilbertiens réels conservant les distances *i.e.* $\lVert f(x) - f(y) \rVert = \lVert x - y \rVert$ pour tous $x, y \in E$.	Rotations, translations, réflexions, vissages, retournements

7 Structures ordonnées

Nom	Forme	Définition	Exemples
Ensemble ordonné	$(E, \leqslant)$	Ensemble muni d'une relation d'ordre *i.e.* une relation binaire réflexive, antisymétrique et transitive	$(\mathbb{N}, \leqslant)$, $(\mathbb{N}, \mid)$, $(\mathbb{R}, \leqslant)$, $(\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \leqslant)$, $(\mathscr{P}(X), \subset)$
Application croissante		Application entre deux ensembles ordonnés qui respecte l'ordre	
Treillis	$(T, \preceq)$	Ensemble ordonné dans lequel toute paire d'éléments admet une borne inférieure et une borne supérieure	$(\mathbb{N}, \mid)$, $(\mathscr{P}(X), \subset)$
Espace réticulé	$(E, +, ., \leqslant)$	Espace vectoriel muni d'une relation d'ordre qui en fait un trellis	$(\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \leqslant)$

8 Des mots compliqués en plus

Les notions suivantes ne sont pas au programme des classes préparatoires. On les donne ici à titre de curiosité.

Nom	**Forme**	**Définition**	**Exemples**
Magma	$(E, \star)$	Ensemble non vide muni d'une loi interne	
Monoïde	$(M, \star)$	Ensemble non vide muni d'une loi interne associative possédant un élément neutre	$(\mathbb{N}, +)$, $(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \times)$
Demi groupe	$(D, +)$	Monoïde dont tous les éléments sont simplifiables	$(\mathbb{N}, +)$
Epimorphisme		morphisme surjectif	
Monomorphisme		morphisme injectif	
Module sur un anneau commutatif A	$(M, +, .)$	Comme un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, mais avec $\mathbb{K} = A$	Tout groupe abélien est un $\mathbb{Z}$-module, et réciproquement