Les relations d'équivalence

V. Rohart

La notion de *relation d'équivalence* est fondamentale en Mathématiques, au sens où beaucoup d'objets de base (vecteurs, nombres, etc.) sont définis à partir de classe d'équivalence. Rappelons que si E est un ensemble, une *relation binaire* sur E est intuitivement une façon de mettre en relation deux éléments de E : par exemple «avoir le même âge» sur l'ensemble E des êtres humains. On peut considérer des relations autres que binaires (par exemple «être alignés» est une relation ternaire sur l'ensemble des points d'un plan) mais ceci n'est pas notre propos.

Si $\mathscr{R}$ désigne notre relation, pour signaler que deux éléments x et y de E sont en relation, on note $x\mathscr{R}y$. Dans le cas contraire on note $x \not\mathscr{R} y$.

Si on veut être rigoureux, une relation binaire est de façon formelle, une partie $\mathscr{R}$ de $E \times E$: c'est donc un ensemble de couples (x, y) d'éléments de E. Dire que x et y sont en relation signifie ni plus ni moins que $(x, y) \in \mathscr{R}$.

Une *relation d'équivalence* est une relation binaire très particulière vérifiant les trois propriétés suivantes :

1. *Réflexivité.* Tout élément est en relation avec lui même : $\forall x \in E \ x\mathscr{R}x$.
2. *Symétrie.* Si un élément est en relation avec un autre, alors la réciproque est vrai : $\forall (x, y) \in E^2 \ (x\mathscr{R}y \Longrightarrow y\mathscr{R}x)$.
3. *Transitivité.* Si un élément est en relation avec un autre et que ce dernier est lui-même en relation avec un troisième, alors le premier est en relation avec le dernier : $\forall (x, y, z) \in E^3 \ (x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}z) \Longrightarrow x\mathscr{R}z$.

Nous nous proposons ici de dresser une liste non exhaustive de relations d'équivalence rencontrées en cours de Mathématiques.

Nombres rationnels. Une «fraction» comme «deux tiers» et la donnée de deux entiers (relatifs) : ici 2 et 3. Plus formellement une fraction est un couple (a, b) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ (car le dénominateur ne peut être nul).

Tout irait bien sans le problème suivant : la fraction $(2, 3)$ («deux tiers») représente la même quantité que la fraction $(4, 6)$ («quatre sixième»). Pourquoi ? parce qu'elles sont proportionnelles, *i.e.* parce que $2 \times 6 = 4 \times 3$ (produit en croix).

On définit donc une relation binaire sur l'ensemble $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ des fractions en disant que :

$$(a, b)\mathscr{R}(c, d) \Longleftrightarrow ab = bc$$

Le lecteur est invité à montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence. La *classe d'équivalence* de la fraction $(2, 3)$ est par définition l'ensemble de toutes les fractions (a, b) qui lui sont équivalentes *i.e.* qui vérifient $2b = 3a$. Par exemple $(4, 6)$ en fait partie, mais $(10, 15)$ aussi. Cette classe d'équivalence se note $\frac{2}{3}$.

Oui, vous ne rêvez pas, $\frac{2}{3}$ est un ensemble, un ensemble de couples d'entiers et par définition $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si et seulement si $ad = bc$ ce qu'on sait depuis très longtemps.

L'ensemble de toutes les classes d'équivalence se note $\mathbb{Q}$. On appelle ses éléments les *nombres rationnels*. Et oui, je sais, les nombres sont des ensembles : surprenant non ?

Vecteurs géométriques. On considère le plan affine usuel $\mathscr{P}$: ses éléments sont des points. On appelle *bipoint* un couple de points (A, B), le point A s'appelant l'origine du bipoint, et le point B l'extrémité. Il est d'usage de représenter un bipoint par une flèche.

Le problème est qu'en Physique, une force n'est pas parfaitement conceptualisée par un bipoint : celle-ci peut rester la même bien que son point d'application (l'origine du bipoint) puisse changer. Cependant la direction, le sens et la longueur du bipoint doit rester les mêmes.

Aussi considère-t-on sur l'ensemble $\mathscr{P} \times \mathscr{P}$ des bipoints la relation binaire suivante :

$$(A, B)\mathscr{R}(C, D) \Longleftrightarrow [AD] \text{ et } [BC] \text{ ont même milieu.}$$

Le lecteur vérifiera sans peine que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence. La classe d'équivalence du bipoint (A, B) se note $\overrightarrow{AB}$. L'ensemble de toutes les classes d'équivalence se note $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ et ses éléments sont appelés *vecteurs géométriques* du plan $\mathscr{P}$.

Entiers modulo n. En Arithmétique on est amené à considérer les multiples d'un certain entier $n > 0$ et à considérer comme «équivalents» deux entiers dont la différence serait un multiple de n.

Par exemple, les enfants savent tous que le 4 heures se prend à 16 heures. Ils ont appris dès leur plus jeune âge que 4 et 16 sont «équivalents» si on fait des sauts de 12 heures. En effet $16 = 4 + 12$.

Plus généralement, on définit une relation binaire sur $E = \mathbb{Z}$ en posant :

$$a \mathscr{R} b \iff a - b \text{ est un multiple de } n.$$

Le lecteur prouvera sans problème que c'est une relation d'équivalence. Il est plus courant de noter $a \equiv b\ [n]$ et de lire «a est congru à b modulo n». Dans notre exemple précédent : $4 \equiv 16\ [12]$.

La classe d'équivalence de a se note $\dot{a}$ et l'ensemble de toutes les classes d'équivalence se note $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Ses éléments sont appelés les *entiers modulo* n.

Direction de droites. On entend souvent parler de direction d'une droite, quand on dit «deux droites ont la même direction» pour dire en fait qu'elles sont parallèles. Mais qu'est-ce donc qu'une direction ?

Sur l'ensemble Δ de toutes les droites du plan, on définit la relation binaire :

$$\mathscr{D}_1 \mathscr{R} \mathscr{D}_2 \iff \mathscr{D}_1 \text{ et } \mathscr{D}_2 \text{ sont parallèles.}$$

Dans le plan (mais pas dans l'espace) être parallèle équivaut à être confondu ou sans point commun. C'est bien entendu une relation d'équivalence.

Une classe d'équivalence est donc constituée de droites, qui sont toutes parallèles entre elles. Une telle classe s'appelle une *direction de droites*. Ainsi par définition même, deux droites ont la même direction (*i.e.* ont la même classe d'équivalence) si et seulement si elles sont parallèles !

Voilà comment on crée une nouvelle Géométrie où il n'y a pas de parallèles : à chaque droite $\mathscr{D}$ du plan affine, notons $\infty_{\mathscr{D}}$ sa direction : cet objet n'est pas un point du plan, c'est quelque chose de nouveau, nous dirons que c'est un «point à l'infini» (mais c'est une façon de parler). On va alors ajouter artificiellement ce point à l'infini à notre droite $\mathscr{D}$ et ainsi considérer l'ensemble :

$$\widehat{\mathscr{D}} = \mathscr{D} \cup \{\infty_{\mathscr{D}}\}$$

Nous appellerons ces objets des «droites projectives». Etant données deux droites non confondues $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$, de deux choses l'une :

– ou bien $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont pas parallèles, donc sont sécantes et $\mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2 = \{I\}$. Comme de plus $\infty_{\mathscr{D}_1} \neq \infty_{\mathscr{D}_2}$ (par définition) on a finalement $\widehat{\mathscr{D}_1} \cap \widehat{\mathscr{D}_2} = \{I\}$.
– ou bien $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont parallèles donc $\infty_{\mathscr{D}_1} = \infty_{\mathscr{D}_2}$ et donc $\widehat{\mathscr{D}_1} \cap \widehat{\mathscr{D}_2} = \{\infty_{\mathscr{D}_1}\}$.

En conclusion deux droites projectives ont toujours un point commun, contrairement aux droites affines. Le lecteur intéressé par ces notions pourra s'initier à la Géométrie projective.

Orientations d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Dans le plan il parait bien évident de dire qu'il n'y a que deux façons de tourner autour d'un point : dans le sens giratoire (sens anti-horaire) ou le contraire. Mais comment généraliser cela à l'espace de dimension n ? Dans l'espace usuel (de dimension 3) on utilise les trois premiers doigts de la main droite et on parle de base directe avec la règle du tire-bouchon ou autre...

On a bien conscience que les bases jouent un rôle important dans la notion d'orientation. Soit donc E un espace vectoriel réel, de dimension finie $n > 0$. Si e et e' sont deux bases, on peut exprimer les vecteurs de la base e' en fonction de la base e : les coordonnées ainsi crées, une fois mise en colonnes, forment une matrice P appelée matrice de passage de e à e', on la note $\mathrm{Pass}(e, e')$.

On définit une relation binaire sur l'ensemble des bases de E en posant :

$$e \mathscr{R} e' \iff \det(\mathrm{Pass}(e, e')) > 0.$$

Le fait que $\mathscr{R}$ soit une relation d'équivalence fait partie du cours d'Algèbre linéaire (chapitre 21 de mes cours de PTSI 2012-2013). Dans ce cours on y montre qu'il n'y a seulement que deux classes d'équivalence.

Par définition, on appelle *orientation* de E l'une des deux classes d'équivalence pour la relation ci-dessus. Si on choisit une orientation ω, on dira que le couple (E, ω) est un *espace orienté*. Si e est une base de E alors ou bien $e \in \omega$, et on dira que e est une base directe, ou bien $e \notin \omega$ et on dira que e est une base rétrograde.

Arc géométrique. Un arc paramétré est un couple $(I, \vec{f})$ avec $\vec{f} : I \to \mathbb{R}^2$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Quand t décrit I, $\vec{f}(t)$ décrit une courbe $\mathscr{C}$ (du moins si $\vec{f}$ est de classe C^1). On dit que $(I, \vec{f})$ est un paramétrage de $\mathscr{C}$.

Le problème est qu'une même courbe peut admettre plusieurs paramétrages. Par exemple le cercle de centre O de rayon 1, privé du point $J(-1,0)$ peut être paramétré d'au moins deux façons :

$$\vec{f}(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta)) \qquad \vec{g}(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$$

avec $\theta \in]-\pi, \pi[$ et $t \in \mathbb{R}$.

Ce problème a des conséquences : on a envie de définir la longueur d'un arc paramétré $([a,b], \vec{f})$ par la formule :

$$L = \int_a^b \|\vec{f}(t)\| \mathrm{d}t$$

mais alors, si la courbe $\mathscr{C}$ est paramétrée par deux arcs différents, on aimerait que les longueurs correspondantes soient égales : il n'y a pourtant aucune raison pour que ce soit le cas.

Sur l'ensemble des arcs paramétrés de classe C^1, on définit alors la relation binaire suivante :

$(I, \vec{f})\mathscr{R}(J, \vec{g}) \Longleftrightarrow$ il existe une bijection C^1 $\varphi : I \to J$, ainsi que φ^{-1} avec $\vec{g} = \vec{f} \circ \varphi$

L'application $\varphi : I \to J$ est alors un changement de paramètre, appelé *difféomorphisme*. On montre alors que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence. Une classe d'équivalence s'appelle un *arc géométrique*. Si Γ est un arc géométrique, ses éléments sont appelés les *paramétrages admissibles* pour Γ.

L'avantage d'une telle notion est que deux paramétrages admissibles quelconques d'un même arc géométrique ont même longueur : on peut donc parler de la longueur d'un arc géométrique comme étant la longueur d'un ce ses paramétrages quelconques.