MATHÉMATIQUES PSI P2B

Année 2023/24

TD n°0

De la bonne rédaction

Révisions de Sup

1 De la bonne rédaction

Exercice 1 *Corriger l'orthographe des phrases suivantes. Plusieurs fautes peuvent se trouver dans une même phrase.*

1. On considère une fonction f définit sur un interval.
2. Il existe deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ tel que $\mathscr{D} \cap \mathscr{D}'$ soit un point.
3. On fais un résonnement par reccurence.
4. On résoud l'equation $2x^2 + x - 1$.
5. On dit qu'une fonction f s'annule si il existe $x \in \mathrm{D}_f$ tel que $f(x) = 0$. On dit que f est la fonction nulle quand $f(x) = 0$ quelque soit x dans D_f.
6. La fonction polynome P (on dit aussi fonction polynômiale) est de degrés 2.

Exercice 2 *Dans les phrases suivantes, les symboles mathématiques ont été mal employés. Les corriger.*

1. L'ensemble de tous les réels positifs est $\{\forall x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$.
2. On sait que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 \geqslant 0$.
3. On sait que dans $\mathbb{C}$, $\exists z,\ z^2 = -1$. Par exemple, $z = \mathrm{i}$.
4. La fonction f est paire quand $f(-x) = f(x)\ \forall x \in \mathrm{D}_f$.
5. Puisque $x + 1 = 2 \Longrightarrow x = 1$.
6. La fonction est paire, $\Longrightarrow$ on l'étudie seulement sur $\mathbb{R}_+$.
7. cos est paire $\wedge$ périodique.

Exercice 3 *(Savoir énoncer une définition, un théorème).*

1. On rappelle qu'une définition commence le plus souvent par « on dit que » ou « on appelle », jamais par « c'est quand on a » ou « c'est par exemple ». En s'imposant cette formulation, donner la définition des objets mathématiques suivants.
   - un triangle rectangle.
   - une matrice carrée.
   - une fonction paire.
   - la matrice d'une application linéaire $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ dans des bases $\mathscr{B}_\mathrm{E}$ et $\mathscr{B}_\mathrm{F}$.
2. On rappelle que l'énoncé d'un théorème comporte la présentation des objets (introduits le plus souvent par « soit »), la liste des hypothèses faites sur lesdits objets (souvent introduites par « si » ou « supposons que », puis enfin la conclusion du théorème (souvent introduite par « alors »). En s'imposant cette formulation, énoncer les théorèmes suivants.
   - le théorème de Pythagore, tel qu'énoncé en classe de Quatrième.
   - le théorème des valeurs intermédiaires (au moins trois formes possibles).
   - le théorème du rang.

Exercice 4 *Corriger la syntaxe mathématique des phrases suivantes.*

1. La fonction x^2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(x^2)' = 2x$.
2. La fonction $\cos(x)$ est périodique.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, f est croissante.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ est croissante.
5. La suite u_n est croissante.

6. $\lim\limits_{x \mapsto 0} f(x) = 1$.
7. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.
8. Pour tout $x > 0$, la primitive de $\frac{1}{x}$ est $\ln(x)$.

Exercice 5 *Dans les phrases suivantes, un élève introduit des lettres sans les présenter. Rectifier ce manquement.*

1. Soit z un nombre complexe que l'on écrit $z = a + b\mathrm{i}$.
2. On veut résoudre $x^2 + x + 1 = 0$ dans $\mathbb{R}$. On a $\Delta = b^2 - 4ac = -3$, donc il n'y a pas de solution.
3. Soit n^3 le cube d'un entier.

Exercice 6 Un élève souhaite démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $6^n - 1$ est un multiple de 5. Il écrit :

> Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété « $\forall n \in \mathbb{N},\ 6^n - 1$ est un multiple de 5 ».
>
> $\mathscr{P}_0$ est vraie car $6^0 - 1 = 0$ et 0 est bien un multiple de 5.
>
> (...)

Expliquer pourquoi sa rédaction est incorrecte.

Exercice 7 Un élève doit montrer qu'étant donné deux nombres complexes z et z', $\mathfrak{Re}(zz') \neq \mathfrak{Re}(z)\mathfrak{Re}(z')$ en général. Sa rédaction est la suivante.

— Soit z et z' dans $\mathbb{C}$. On dispose donc de $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $z = a + b\mathrm{i}$ et $z' = c + d\mathrm{i}$.

— Ainsi, $zz' = (a + b\mathrm{i})(c + d\mathrm{i}) = (ac - bd) + (ad + bc)\mathrm{i}$, si bien que $\mathfrak{Re}(zz') = ac - bd$.

— Or $\mathfrak{Re}(z)\mathfrak{Re}(z') = ac$ et $ac \neq ac - bd$, on a donc prouvé que $\mathfrak{Re}(zz') \neq \mathfrak{Re}(z)\mathfrak{Re}(z')$

Pourquoi cette démonstration n'est pas correcte ? Comment la rectifier ?

Exercice 8 *(Version).* Traduire dans un français correct, si possible élégant, sans utiliser le mot-à-mot, sans prononcer les variables muettes. La lettre E désigne ici un ensemble et $\mathscr{P}$ un prédicat sur E (c'est-à-dire pour tout élément x de E, $\mathscr{P}(x)$ est une assertion).

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{Z},\ x \leqslant n$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, [(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ |x| \leqslant \varepsilon) \Longrightarrow x = 0]$.
3. $\exists z \in \mathbb{C},\ z^3 = 1 + \mathrm{i}$.
4. $[\exists x \in \mathrm{E},\ \mathscr{P}(x)] \wedge [\forall y \in \mathrm{E},\ \forall z \in \mathrm{E},\ (\mathscr{P}(y) \wedge \mathscr{P}(z) \Longrightarrow y = z)]$.

Exercice 9 *(Thème).* Traduire à l'aide d'assertions quantifiées.

1. Aucun rationnel n'a un carré valant 2.
2. Le cosinus d'un réel ne peut jamais valoir 3.
3. On peut trouver au moins un nombre complexe dont l'exponentielle vaut -1.
4. Le nombre 5 est un nombre premier.
5. Étant donné une droite du plan affine, et un point extérieur à cette droite, il existe une unique droite passant par ce point, ne rencontrant pas la première droite.

Pour la dernière phrase, on notera $\mathscr{P}$ le plan affine, et Δ l'ensemble des droites de $\mathscr{P}$.

2 Du calcul, des équations

Exercice 10 *(Dans $\mathbb{C}$)*

1. Écrire sous forme exponentielle : -1, i, 3, $1 + \mathrm{i}$, $-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.
2. *(extrait CentraleSupélec, oral 2021).* Résoudre $\mathrm{e}^z = -1$.
3. Si $z \in \mathbb{C}$, exprimer $\mathfrak{Re}(e^z)$, $\mathfrak{Im}(\mathrm{e}^z)$, $|\mathrm{e}^z|$ et $\arg(\mathrm{e}^z)$ en fonction de z.
4. Soit z et z' dans $\mathbb{C}$. Exprimer $\mathfrak{Re}(zz')$ et $\mathfrak{Im}(zz')$ en fonction des parties réelles et imaginaires de z et z'.
5. Résoudre $z^4 + z^2 + 1 = 0$.

6. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathfrak{Re}(z) < 0$ et $\mathfrak{Im}(z) > 0$. Donner une formule exprimant un argument de z.
7. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathfrak{Re}(z) < 0$ et $\mathfrak{Im}(z) < 0$. Donner une formule exprimant un argument de z.
8. Retrouver la formule $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$ grâce aux nombres complexes.

Exercice 11 *Factoriser le plus possible.*

1. $4x^2 - 9 - (4x-9)(2x+3)$ (où $x \in \mathbb{R}$).
2. $\frac{(n+1)!}{(n-2)!} + \frac{n!}{(n-1)!}$ (où $n \in \mathbb{N}$ est tel que $n \geqslant 2$).
3. $\frac{(n-1)!}{n!} - \frac{n!}{(n+1)!}$ (où $n \in \mathbb{N}$ est tel que $n \geqslant 1$).

Exercice 12

1. Trouver les nombres x et y dont la somme et le produit valent tous les deux 5.
2. Trouver les nombres x et y dont la somme et le produit valent tous les deux 3.
3. Soit w un nombre réel. On cherche les nombres x et y tels que l'on ait $x+y = xy = w$. Pour quels valeurs de w trouve-t-on des nombres réels ?

3 Des dérivées

Exercice 13

1. *Calculer les dérivées des fonctions suivantes, en précisant le domaine de dérivabilité.*

$$f : x \longmapsto \sqrt{x^2+x+1} \qquad g : x \longmapsto 5\cos(3x+2)$$

$$h : x \longmapsto x^2\ln(x) \qquad i : x \longmapsto \frac{\cos(x)}{\mathrm{e}^x + x^4}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer, grâce aux nombres complexes, la dérivée n-ième de $j : x \longmapsto \sin(2x)\mathrm{e}^{-3x}$.

Exercice 14 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x \geqslant 0 \\ -x^2 & si \quad x < 0 \end{cases}$$

1. Représenter f dans un repère orthonormal.
2. Montrer que f est dérivable en 0 en utilisant son taux d'accroissement.
3. Expliciter $f'(x)$ pour tout x dans $\mathbb{R}$.
4. Montrer que f' n'est pas dérivable en 0.

Exercice 15 Donner un équivalent de $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ quand $n \to +\infty$.

4 Des intégrales

Exercice 16 Décomposer $\frac{1}{1-\mathrm{X}^2}$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(\mathrm{X})$ et en déduire une primitive de $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$ sur $]-1,1[$.

Exercice 17 Calculer $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$ (notation signifiant « une primitive quelconque de $x \mapsto \frac{1}{x^2+x+1}$ sur un intervalle quelconque »).

Exercice 18 Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note I_n l'intégrale suivante :

$$\int_1^2 \frac{1}{x^n}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer I_2.
2. Expliquer pourquoi pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout réel $x \in [1,2]$,

$$0 \leqslant \frac{1}{x^n}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \leqslant \frac{\mathrm{e}}{x^n}.$$

3. En déduire un encadrement de I_n puis étudier la convergence de la suite (I_n).