Corrigé des exercices 1 à 9 du chapitre 16
Toutes les maths en MP/MPI

Exercice 1 L'application proposée est clairement bilinéaire, symétrique, positive. Reste l'aspect non dégénéré. Si $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, l'égalité $\sum_{k=0}^{p} \mathrm{P}(k)^2 = 0$ équivaut aux $p+1$ égalités $\mathrm{P}(0) = \mathrm{P}(1) = \ldots = \mathrm{P}(p) = 0$: P a alors $p+1$ racines distinctes dans $\mathbb{R}$.

- Si $p + 1 > n$ alors P est nul.
- Si $p + 1 \leqslant n$, P n'est pas forcément nul, comme le montre l'exemple du polynôme $\mathrm{P} = \mathrm{X}(\mathrm{X}-1)\ldots(\mathrm{X}-p)$, qui est de degré $p+1$, donc dans $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

En conclusion, les entiers p pour lesquels l'application de l'énoncé est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ sont les p strictement supérieurs à $n-1$, c'est-à-dire supérieurs ou égaux à n.

Exercice 2 Premièrement, l'application est correctement définie car si $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, alors $\mathrm{P}(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x^n$ et $\mathrm{Q}(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x^p$ pour des $n, p \in \mathbb{N}$, donc par croissances comparées $\mathrm{P}(x)\mathrm{Q}(x)\mathrm{e}^{-n} = \underset{x \to +\infty}{o}(\frac{1}{n^2})$ (par exemple), ce qui suffit à prouver la convergence (absolue) de la série numérique $\sum \mathrm{e}^{-n}\mathrm{P}(n)\mathrm{Q}(n)$.

Ensuite, la bilinéarité, la positivité et la symétrie ne posent aucun problème. Pour l'aspect non dégénéré, soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que $\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-n}\mathrm{P}(n)^2 = 0$. On a alors $\mathrm{e}^{-n}\mathrm{P}(n)^2 = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et par suite $\mathrm{P}(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, P possède une infinité de racines, donc est nul.

Exercice 3 1. Il s'agit de calculer dans un premier temps les projections $p_1(\mathrm{X}^3)$ et $p_2(\mathrm{X}^3)$ de X^3 sur $\mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$ relativement à φ et ψ respectivement. Dans les deux cas, ces projections sont de la forme $a\mathrm{X} + b$.

• Pour φ. On cherche a et b tels que $\varphi(a\mathrm{X} + b - \mathrm{X}^3, 1) = \varphi(a\mathrm{X} + b - \mathrm{X}^3, \mathrm{X}) = 0$. Après un petit calcul d'intégrale, cela donne les relations $\frac{1}{2}a + b = \frac{1}{4}$ et $\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b = \frac{1}{5}$. On trouve sans difficulté $a = \frac{9}{10}$ et $b = -\frac{1}{5}$. La distance cherchée est alors $\|p(\mathrm{X}) - \mathrm{X}^3\| = \sqrt{\int_0^1 (\frac{9}{10}x - \frac{1}{5} - x^3)^2 \mathrm{d}x}$ et un calcul rapide montre que cela vaut $\frac{3\sqrt{7}}{70}$.

• Pour ψ. Cela va beaucoup plus vite car X^3 est orthogonal (pour ψ) à $\mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$ (car orthogonal à 1 et à X), et donc $p_2(\mathrm{X}) = 0$. La distance étudiée vaut donc $\|\mathrm{X}^3\| = 1$, qui est supérieure à la distance précédente.

2. Cette borne inférieure vaut 0. En effet, si $\varepsilon > 0$, il n'est pas bien dur de construire un produit scalaire pour lequel $d(\mathrm{X}^3, \mathbb{R}_1[\mathrm{X}]) = \varepsilon$. Prendre par exemple $\varphi_\varepsilon(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = \sqrt{\varepsilon} p_3 q_3 + \sum_{n \neq 3} p_k q_k$ (où p_k et q_k sont les coefficients de degré k de P et Q).

Exercice 4 Soit $x \in \mathrm{Im}(f)$. On peut donc écrire $x = f(x')$ avec $x' \in \mathrm{E}$. Pour tout $y \in \mathrm{Ker}(f)$, on a alors

$$\langle x, y\rangle = \langle f(x'), y\rangle = \langle x', f(y)\rangle = \langle x', 0_{\mathrm{E}}\rangle = 0,$$

ce qui prouve que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)^{\perp}$. Le théorème du rang (possible car E est euclidien, donc de dimension finie) assure le fait que $\dim \mathrm{Im}(f) = n - \dim \mathrm{Ker}(f) = \dim \mathrm{Ker}(f)^{\perp}$. On en déduit que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)^{\perp}$.

Exercice 5 Il y a des carrés, une inégalité : ça sent Cauchy-Schwarz à 10 km. Puisque f est positive, on peut écrire

$$\mathrm{I}_{n+p}^2 = \left(\int_0^1 x^{n+p} f(x)\mathrm{d}x\right)^2 = \left(\int_0^1 x^n\sqrt{f(x)}\cdot x^p\sqrt{f(x)}\mathrm{d}x\right)^2.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz relative à la célèbre forme bilinéaire symétrique positive $(a,b)\mapsto \int_0^1 a(x)b(x)\mathrm{d}x$ donne alors $\mathrm{I}_{n+p}^2 \leqslant \mathrm{I}_{2n}\mathrm{I}_{2p}$.

Exercice 6 Notons M la matrice de l'énoncé. On calcule sans peine : $\mathrm{M}^2 = \mathrm{M}$. Ainsi, M est la matrice d'une projection. On détermine $\mathrm{Ker}(\mathrm{M})$ en résolvant $\mathrm{MX} = 0$ (ou mieux encore : $6\mathrm{MX} = 0$). On trouve $\mathrm{Ker}(\mathrm{M}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((1,2,-1))$. On cherche alors $\mathrm{Im}(\mathrm{M})$ (c'est le sev sur lequel on projette) : le théorème du rang nous apprend que c'est un sev de dimension 2, et comme il est engendré par les colonnes de M, on en déduit que $\mathrm{Im}(\mathrm{M})$ vaut $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}((5,-2,1),(-1,1,1))$, par exemple. On constate alors que $(5,-2,1)$ et $(-1,1,1)$ sont tous deux orthogonaux à $(1,2,-1)$: cela prouve que $\mathrm{Im}(\mathrm{M}) \perp \mathrm{Ker}(\mathrm{M})$ et donc que la projection est orthogonale.

Exercice 7 1. Soit $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{A} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On calcule, en tenant compte de $\mathrm{S}^\top = \mathrm{S}$, $\mathrm{A}^\top = -\mathrm{A}$ et de la propriété fondamentale de la trace,

$$\langle \mathrm{S}, \mathrm{A}\rangle = \mathrm{tr}(\mathrm{S}^\top\cdot \mathrm{A}) = \mathrm{tr}(\mathrm{SA}) = \mathrm{tr}(\mathrm{AS}) = -\mathrm{tr}(\mathrm{A}^\top\cdot \mathrm{S}) = -\langle \mathrm{A}, \mathrm{S}\rangle = -\langle \mathrm{S}, \mathrm{A}\rangle.$$

Finalement, on a montré que $\langle \mathrm{S}, \mathrm{A}\rangle$ était égal à son opposé, et donc qu'il était nul. Les espaces $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont donc orthogonaux.

2. Il est de notoriété publique que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$: on en déduit donc que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})^{\perp}$ (la question 1 ne montrait que l'inclusion $\subset$). La décomposition de M suivant cette somme directe est bien connue : $\mathrm{M} = \frac{\mathrm{M}+\mathrm{M}^\top}{2} + \frac{\mathrm{M}-\mathrm{M}^\top}{2}$. Ainsi, la projection orthogonale de M sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est $p(\mathrm{M}) = \frac{\mathrm{M}+\mathrm{M}^\top}{2}$. Ainsi, $d(\mathrm{M}, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \|\mathrm{M} - p(\mathrm{M})\|$ qui vaut $\|\frac{\mathrm{M}-\mathrm{M}^\top}{2}\|$ ou, si l'on préfère,

$$d(\mathrm{M}, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{tr}((\mathrm{M}-\mathrm{M}^\top)^\top\cdot(\mathrm{M}-\mathrm{M}^\top))} = \frac{1}{2}\sqrt{\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n (m_{i,j} - m_{j,i})^2}$$

si bien sûr $\mathrm{M} = (m_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$.

3. On pense à Cauchy-Schwarz (inégalité dans un contexte euclidien...), qui s'écrit ici $|\langle \mathrm{I}_n, \mathrm{A}\rangle| \leqslant \|\mathrm{I}_n\|\cdot\|\mathrm{A}\|$, ce qui donne $|\mathrm{tr}(\mathrm{I}_n^\top \mathrm{A})| \leqslant \sqrt{\mathrm{tr}(\mathrm{I}_n^\top \mathrm{I}_n)}\sqrt{\mathrm{tr}(\mathrm{A}^\top \mathrm{A})}$, ce qui est exactement ce que l'on veut puisque $\mathrm{tr}(\mathrm{I}_n) = n$.

Exercice 8 On munit l'espace $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire

$$(P, Q) \longmapsto \int_0^{+\infty} e^{-x} P(x) Q(x) dx.$$

On laisse le soin au lecteur de vérifier que cela est bien défini, et que c'est effectivement un produit scalaire.

Le problème consiste à déterminer (le carré de) la distance du polynôme X^n au sous-espace $\mathbb{R}_1[X]$ (de dimension finie, égale à 2). On sait alors que cette borne inférieure est réalisée pour la projection orthogonale $p(X^n)$ de X^n sur $\mathbb{R}_1[X]$. Cette projection s'écrit $p(X^n) = a + bX$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et est caractérisée par la double condition donnée par $\langle X^n - p(X^n), 1\rangle = \langle X^n - p(X^n), X\rangle = 0$. On calcule alors

$$\langle X^n - p(X^n), 1\rangle = \int_0^{+\infty} e^{-x}(x^n - a - bx) dx = n! - a - b,$$

$$\langle X^n - p(X^n), X\rangle = \int_0^{+\infty} e^{-x}(x^{n+1} - ax - bx^2) dx = (n+1)! - a - 2b.$$

(on a utilisé le fait bien connu sur la fonction Γ d'Euler : $\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^n dx = n!$). On aboutit donc au système $\begin{cases} a + b &= n! \\ a + 2b &= (n+1)! \end{cases}$ qui se résout quasiment immédiatement en $b = (n+1)! - n! = n.n!$ et $a = n! - b = (1-n).n!$. De cela on en déduit que la borne inférieure cherchée vaut

$$\begin{aligned} \|X^n - p(X^n)\|^2 &= \int_0^{+\infty} e^{-x} \left(x^n - a - bx\right)^2 dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-x}(x^{2n} + a^2 + b^2x^2 - 2ax^n - 2bx^{n+1} + 2abx) dx \\ &= (2n)! + a^2 + 2b^2 - 2an! - 2b(n+1)! + 2ab. \end{aligned}$$

En remplaçant a et b par leurs valeurs et en simplifiant un peu on trouve $(2n)! - (n!)^2(1+n^2)$.

Exercice 9 On connaît l'importance des matrices de la forme $A^\top A$ depuis que l'on sait que la norme euclidienne de A est $\sqrt{A^\top A)}$. Rappelons aussi que le produit scalaire canonique de X et Y (des matrices-colonnes) est $X^\top Y$.

1. L'inclusion $\subset$ est évidente : si $X \in \mathrm{Ker}(A)$, alors $AX = 0$, donc $A^\top AX = 0$, c'est-à-dire $X \in \mathrm{Ker}(A^\top A)$. Réciproquement, si $X \in \mathrm{Ker}(A^\top A)$, alors $A^\top AX = 0$. En pré-multipliant par $X^\top$ on obtient $(AX)^\top(AX) = 0$, soit encore $\|AX\|^2 = 0$, et finalement $X \in \mathrm{Ker}(A)$.

2. On parle d'image après avoir parlé de noyau : on pense donc au théorème du rang. Comme ci-dessus, une inclusion est évidente : $\mathrm{Im}(A \cdot A^\top) \subset \mathrm{Im}(A)$, on ne fait pas l'affront d'expliquer pourquoi. Le théorème du rang assure que $\dim \mathrm{Im}(AA^\top) = n - \dim \mathrm{Ker}(AA^\top)$, et la question 1 (appliquée à la matrice $A^\top$, et non à A !) donne $\mathrm{Ker}(AA^\top) = \mathrm{Ker}(A^\top)$. Ainsi, $\dim \mathrm{Im}(AA^\top) = n - \dim \mathrm{Ker}(A^\top) = \mathrm{rg}(A^\top) = \mathrm{rg}(A)$ (propriété classique du rang), qui n'est autre que $\dim \mathrm{Im}(A)$. En conclusion, les sev $\mathrm{Im}(AA^\top)$ $\mathrm{Im}(A)$ ont même dimension, et l'inclusion du 1^{er} dans le 2^{d} entraîne leur égalité.