Année 2025/26

Khôlle n° 25
semaine du 25 mai

démonstration de cours à savoir refaire :
— démonstrations exigibles pour tout le monde ;
— démonstrations exigibles pour les élèves avancés.
Ce qui n'est pas en couleur doit évidemment être connu (seule la démonstration n'est pas à apprendre).

1 Endomorphismes remarquables des espaces euclidiens

- Lemme de stabilité : si F est stable par f autoadjoint, alors $F^\perp$ aussi.
- Expression d'une réflexion par rapport à $a^\perp$: $s(x) = x - 2\frac{\langle x,a\rangle}{\|a\|^2}a$.
- Une symétrie est une symétrie orthogonale ssi c'est une symétrie isométrique.
- Description de $O_2(\mathbb{R})$, caractère abélien de $SO_2(\mathbb{R})$. Interprétation géométrique des éléments de $SO_2(\mathbb{R})$ (rotations) et de $O_2^-(\mathbb{R})$ (réflexions : savoir donner l'axe).
- Description de $O_3(\mathbb{R})$, rotation, antirotations. Étude d'une matrice de $SO_3(\mathbb{R})$: détermination de l'axe, de $\cos\vartheta$ grâce à la trace, du signe de $\sin\vartheta$.

2 Variables aléatoires à densité

- Changement d'échelle : si X est à densité, $aX+b$ aussi (si $a\neq 0$), expression d'une densité de $aX+b$. Si φ est strictement monotone, de classe $\mathscr{C}^1$ et telle que φ' ne s'annule qu'en un nombre fini de points, $\varphi(X)$ est à densité. Savoir cependant trouver une densité de X^2.
- Calcul des espérances des lois usuelles : $\mathscr{U}(a,b)$, $\mathscr{E}(\lambda)$, $\mathscr{N}(0,1)$, $\gamma(\nu)$. Espérance de $aX+b$.
- Fonction caractéristique φ_X d'une variable réelle discrète ou à densité. Calcul pour $\mathscr{E}(\lambda)$. Cas de $\mathscr{N}(0,1)$ par une intégrale à paramètre. Calcul de φ_{aX+b} si $a\neq 0$ et X à densité. Si X admet un moment d'ordre k, alors φ_k est k fois dérivable et $\varphi_X^{(k)}(0) = i^k\mathbb{E}(X^k)$.
- Couple $X = (X_1, X_2)$ de variables aléatoires réelles, fonction de réparation F_X, couples admettant une densité, relation $f_X = \frac{\partial^2 F_X}{\partial x_1 \partial x_2}$ « presque partout ». Si $X \perp\!\!\!\perp Y$, $F_{(X,Y)} = F_X \otimes F_Y$, et $f_{X,Y} = f_X \otimes f_Y$, de plus $X+Y$ admet une densité donnée par $f_X \star f_Y$. Relation $\varphi_{X+Y} = \varphi_X\varphi_Y$ en cas d'indépendance.
- Convergence en loi. Théorème de Lévy : traduction par la CVS des fonctions caractéristiques (admis). Le théorème central limite. Application : approximation d'une loi binomiale par une loi normale, surbooking.

3 Exercices de TD à savoir refaire

$\boxed{\text{TD 17}}$: 1, 2, 3, 7, 8, 11, 12, 13, 14
$\boxed{\text{TD 18}}$: 1, 2, 3, 4, 15, 16