Année 2025/26

Khôlle n° 24
semaine du 11 mai

démonstration de cours à savoir refaire :
— démonstrations exigibles pour tout le monde ;
— démonstrations exigibles pour les élèves avancés.
Ce qui n'est pas en couleur doit évidemment être connu (seule la démonstration n'est pas à apprendre).

1 Espaces préhilbertiens réels

Essentiellement des exercices, mais tout le cours doit être su.

2 Endomorphismes remarquables des espaces euclidiens (cours)

• Endomorphismes autoadjoints. Si $\mathscr{B}$ est une BON, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est symétrique ssi f est autoadjoint. Lemme de stabilité : si F est stable par f autoadjoint, alors $F^{\perp}$ aussi. Démonstration du théorème spectral par récurrence (on a déjà montré l'existence d'une valeur propre réelle au chapitre 10).

• Endomorphismes autoadjoints positifs, définis positifs. Caractérisation spectrale. Notations $\mathscr{S}(E)$, $\mathscr{S}^{+}(E)$, $\mathscr{S}^{++}(E)$.

• Une projection (resp.) est une projection orthogonale ssi c'est une projection (resp. symétrie) autoadjointe. Notation de réflexion, de retournement. Expression d'une réflexion par rapport à $a^{\perp}$: $s(x) = x - 2\frac{\langle x,a\rangle}{\|a\|^2}a$.

• Isométries entre deux espaces métriques : elles sont injectives. Les isométries vectorielles (=linéaires) d'un espace euclidien sont bijectives. Groupe orthogonal $(O(E), \circ)$. Si $f \in \mathscr{L}(E)$, il y a équivalence entre $f \in O(E)$, f préserve la norme et f préserve le produit scalaire.

• Une symétrie est une symétrie orthogonale ssi c'est une symétrie isométrique.

• Description de $O_2(\mathbb{R})$, caractère abélien de $SO_2(\mathbb{R})$. Interprétation géométrique des éléments de $SO_2(\mathbb{R})$ (rotations) et de $O_2^-(\mathbb{R})$ (réflexions : savoir donner l'axe).

• Produit mixte, produit vectoriel dans un euclidien orienté de dimension 3, propriétés, expression dans une BON.

• Conservation de l'orthogonal : $f\langle V^{\perp}\rangle = f\langle V\rangle^{\perp}$ et lemme de stabilité : si V est stable par f, $V^{\perp}$ aussi. Description de $O_3(\mathbb{R})$, rotation, antirotations. Étude d'une matrice de $SO_3(\mathbb{R})$: détermination de l'axe, de $\cos\vartheta$ grâce à la trace, du signe de $\sin\vartheta$. Généralisation à $O_n(\mathbb{R})$ (admise).

3 Exercices de TD à savoir refaire

$\boxed{\text{TD 16}}$: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 20, 23