



démonstration de cours à savoir refaire :

- démonstrations exigibles pour tout le monde ;
- démonstrations exigibles pour les élèves avancés.

Ce qui n'est pas en couleur doit évidemment être connu (seule la démonstration n'est pas à apprendre).

1 Intégrales à paramètre

Les exercices essentiellement, mais les énoncés des théorèmes doivent être parfaitement sus, ainsi que les exemples vus en cours.

NB. La fonction Γ d'Euler n'a pas été étudiée en cours.

2 Espaces préhilbertiens réels (cours)

- Produit scalaire sur un \mathbb{R} -espace vectoriel. Exemples usuels sur \mathbb{C} (à savoir exprimer avec une partie réelle), \mathbb{R}^n , $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, $\mathcal{L}_c^2(I, \mathbb{R})$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ (à savoir exprimer avec la trace).

- Inégalité de Cauchy-Schwarz énoncée pour une forme bilinéaire symétrique positive, et cas d'égalité pour un produit scalaire. Conséquence : $x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$ est une norme (qualifiée d'euclidienne). Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien pour lequel « ACV \implies CV ». Formules de polarisation et identité du parallélogramme : savoir en déduire que la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur \mathbb{R}^2 n'est pas euclidienne.

- Toute famille orthogonale ne contenant pas 0_E est libre. Théorème de Pythagore : réciproque vraie pour une famille de deux vecteurs, mais fausse sinon. Procédé de Gram-Schmidt. Existence de bases orthonormales dans un espace euclidien, théorème de la BON incomplète.

- Vecteurs orthogonaux, sous-espaces vectoriels orthogonaux¹. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \perp \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Autres exemples vus en cours : $\mathcal{P} \perp \mathcal{F}$ dans $\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$, $\mathbb{R} \perp i\mathbb{R}$ dans \mathbb{C} .

Orthogonal d'une partie A : A^\perp est un sev et est une partie fermée. Propriété de décroissance : $A \subset B \implies B^\perp \subset A^\perp$. Dire $F \perp G$ revient à dire $F \subset G^\perp$. Cas particuliers à savoir expliquer : $E^\perp = \{0_E\}$ et $\{0_E\}^\perp = E$.

- Si F est un sev, alors $F \cap F^\perp = \{0_E\}$. Si F est un sev tel que $F \oplus F^\perp = E$, alors $(F^\perp)^\perp = F$. Si F est de dimension finie, alors $F \oplus F^\perp = E$. Dimension de F^\perp si E est de dimension finie.

- Projections orthogonales sur un sev F tel que $E = F \oplus F^\perp$. Expression dans une BON si $\dim F < \infty$. Inégalité de Bessel : toute projection orthogonale est 1-lipschitzienne + réciproque. Propriété minimisante : distance à un sous-espace F tel que $E = F \oplus F^\perp$.

- Notion de forme linéaire représentable : elle est toujours continue et le vecteur qui la représente est unique. Dans un euclidien, toute forme linéaire est représentable. Isomorphismes de Riesz, notations φ^{\sharp} et v^{\flat} .

- Notion d'hyperplan admettant un vecteur normal. En dimension finie, tout hyperplan admet un vecteur normal, et ses vecteurs normaux sont colinéaires. Distance d'un point à un hyperplan de vecteur normal a : $d(x, H) = \frac{|\langle x, a \rangle|}{\|a\|}$. Expression dans une BON. Généralisation aux hyperplans affines.

3 Exercices de TD à savoir refaire

TD 15 : 1, 4, 6 (erreur énoncé : lire $\int_0^{\sqrt{n}}$ au lieu de \int_0^n), 9 et 11 (faits en cours), 12 (sauf question 5).

TD 16 : le principe du 23 a été vu en cours (on admet $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} x^n e^x dx = n!$).

1. Dans le cours, j'ai défini la notion de parties orthogonales quelconques. Pour éviter toute ambiguïté, il vaut mieux réserver cette notion aux sous-espaces vectoriels : cf. poly de cours pour les raisons de ce choix.