Année 2023/24

Khôlle n° 23
semaine du 29 avril

1 Espaces préhilbertiens réels

• Produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Exemples usuels sur $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$, $\mathbb{L}^2_c(\mathrm{I},\mathbb{R})$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ (exprimé avec la trace).

• Inégalité de Cauchy-Schwarz énoncée pour une forme bilinéaire symétrique positive. Cas d'égalité pour un produit scalaire. Conséquence : $x \mapsto \sqrt{\langle x,x\rangle}$ est une norme (qualifiée d'euclidienne). Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien pour lequel « ACV $\Longrightarrow$ CV ». Formules de polarisation. Identité du parallélogramme (ou d'Apollonius), la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$ n'est pas euclidienne si $n \geqslant 2$.

• Toute famille orthogonale ne contenant pas 0_{E} est libre. Théorème de Pythagore (réciproque vraie pour une famille de deux vecteurs, mais fausse sinon). Procédé de Gram-Schmidt. Existence de bases orthonormales dans un espace euclidien, théorème de la BON incomplète.

• Vecteurs orthogonaux, parties orthogonales. Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \perp \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Orthogonal d'une partie A. L'ensemble $\mathrm{A}^\perp$ est un sev fermé. Propriété de décroissance : $\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \Longrightarrow \mathrm{B}^\perp \subset \mathrm{A}^\perp$, $\mathrm{E}^\perp = \{0_{\mathrm{E}}\}$ et $\{0_{\mathrm{E}}\}^\perp = \mathrm{E}$. Notation $a^\perp$ au lieu de $\{a\}^\perp$.

• Si F est un sev, alors $\mathrm{F} \cap \mathrm{F}^\perp = \{0_{\mathrm{E}}\}$. Si F est un sev tel que $\mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\perp = \mathrm{E}$, alors $\left(\mathrm{F}^\perp\right)^\perp = \mathrm{F}$. Si F est de dimension finie, alors $\mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\perp = \mathrm{E}$. Dimension de $\mathrm{F}^\perp$ si E est euclidien. Sous-espaces affines orthogonaux, perpendiculaires (quand leurs orthogonaux sont orthogonaux), convention des droites affines dans un espace euclidien de dimension $\geqslant 3$: elles sont perpendiculaires quand elles sont sécantes et orthogonales (i.e. perpendiculaires dans le plan affine qui les contient).

• Projection orthogonale (quand $\mathrm{Ker}(p) \perp \mathrm{Im}(p)$). Si p est une projection, alors p est une projection orthogonale ssi $\forall x \in \mathrm{E},\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$ (Bessel). Expression de $p_{\mathrm{F}}(x)$ dans une BON de F (si $\dim(\mathrm{F}) < \infty$). Interprétation de Gram-Schmidt en terme de projection orthogonale. Propriété minimisante : Si $\mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\perp = \mathrm{E}$, alors pour tout x, $d(x,\mathrm{F}) = \|x - p_{\mathrm{F}}(x)\|$, de plus $p_{\mathrm{F}}(x)$ est l'unique vecteur de F à vérifier cela.

• Forme linéaire représentable : elles sont toutes continues. Le théorème de représentation de Riesz en dimension finie donne un isomorphisme canonique $\flat : \mathrm{E} \to \mathrm{E}^*$. Formes linéaires de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

• Si $a \in \mathrm{E} \setminus \{0_{\mathrm{E}}\}$, alors $a^\perp$ est un hyperplan fermé de E. Si $\dim(\mathrm{E}) < \infty$, tout hyperplan est de la forme $a^\perp$. Si $a^\perp = b^\perp$, alors a et b sont colinéaires. Distance d'un point à un hyperplan, à une droite. Expression dans une BON. Cas des hyperplans affines.

2 Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien (cours uniquement)

• Endomorphisme autoadjoint. Caractérisation matricielle, isomorphisme $\mathscr{S}(\mathrm{E}) \cong \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Les projections orthogonales sont exactement les projections autoadjointes. Notion de symétrie orthogonale, réflexion, retournement. Les symétries orthogonales sont exactement les symétries autoadjointes. Théorème spectral. Endomorphismes autoadjoints positifs, définis positifs, caractérisation matricielle, caractérisation spectrale.

• Isométrie entre deux espaces métriques, traduction dans les EVN. Isométrie vectorielle d'un espace euclidien : bijectivité, conservation de la norme et du produit scalaire. Notation $\mathrm{O}(\mathrm{E})$.

3 Exercices de TD à savoir refaire

$\boxed{\text{TD 16}}$: 1, 2, 3, 4, 5, 9, 10, 13, 15, 18, 19.