



En souligné : démonstration de cours à savoir refaire.

1 Variables aléatoires discrètes

Toutes les définitions et énoncés du chapitre entier doivent être sus !

- Variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. Formule alternative de l'espérance : $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n)$.

Série génératrice $\sum P(X = n)t^n$: son rayon est ≥ 1 . Sa somme G_X est au moins définie sur $[-1, 1]$, $G_X(1) = 1$, et est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au moins sur $] -1, 1[$. Calcul pour les lois usuelles. La restriction de G_X à un voisinage de 0 caractérise la loi de X. Formule $G_X(t) = \mathbb{E}(t^X)$. Si X, Y sont indépendantes, $G_{X+Y} = G_X G_Y$ sur un voisinage de 0.

- Si $R > 1$, $G'_X(1) = \mathbb{E}(X)$. Si $R = 1$, $X \in \mathbb{L}^1(\Omega)$ ssi G_X est dérivable en 1^- et dans ce cas $\mathbb{E}(X) = G'_X(1^-)$. Généralisation : $X \in \mathbb{L}^k(\Omega)$ ssi G_X est k fois dérivable en 1^- et dans ce cas $\mathbb{E}(X(X-1)\dots(X-k+1)) = G_X^{(k)}(1^-)$. Calcul de la variance des lois usuelles au moyen de l'égalité $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$.

- Lemme « $P(A) = \mathbb{E}(1_A)$ ». Inégalité de Markov, inégalité de Bienaymé-Tchebychev. On constate que l'inégalité est très large avec la loi géométrique $\mathcal{G}(0.2)$. Loi faible des grands nombres, notion de moyenne empirique, de convergence en probabilité. Exemple d'application (recherche de la taille d'un échantillon).

2 Intégrales à paramètre

- Rappel sur l'interversion $\int_{[a,b]} / \lim_{n \rightarrow \infty}$ sur un segment en cas de CVU. Théorème de convergence dominée de Lebesgue. Exemple : $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt$.

- Intégration terme à terme de Lebesgue. Exemple : $\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \zeta(2)$.

- Continuité et limite (généralisation du théorème de convergence dominée pour $\lim_{x \rightarrow x_0} \int_I f(t, x) dt$ si x_0 est adhérent à J).

- Classe $\mathcal{C}^1$ de $x \mapsto \int_I f(t, x) dt$. Généralisation à la classe $\mathcal{C}^k$.

- Étude de la fonction Γ d'Euler $x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$: bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$, de classe $\mathcal{C}^\infty$.

3 Exercices de TD à savoir refaire

TD 14 : 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12, 16, 18, 21, 22, 23. TD 15 : 4, 5, 10.