Année 2023/24

Khôlle n° 22
semaine du 22 avril

1 Intégrales à paramètre

• Rappel sur l'interversion $\int_{[a,b]}$ / $\lim\limits_{n\to\infty}$ sur un segment en cas de CVU. Théorème de convergence dominée de Lebesgue. Exemples : $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n(t)\mathrm{d}t$, $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^n+\mathrm{e}^x}$.

• Intégration terme à terme de Lebesgue. Exemple : $\int_0^{+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x-1}\mathrm{d}x=\zeta(2)$.

• Continuité et classe $\mathscr{C}^1$ de $x\mapsto\int_{\mathrm{I}} f(t,x)\mathrm{d}t$. Généralisation à la classe $\mathscr{C}^k$. Généralisation du théorème de convergence dominée pour $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{\mathrm{I}} f(t,x)\mathrm{d}t$.

• Étude de la fonction Γ d'Euler $x\mapsto\int_0^{+\infty}t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$: bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$, de classe $\mathscr{C}^\infty$.

2 Espaces préhilbertiens réels

• Produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Exemples usuels sur $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$, $\mathbb{L}^2_c(\mathrm{I},\mathbb{R})$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ (exprimé avec la trace).

• Inégalité de Cauchy-Schwarz énoncée pour une forme bilinéaire symétrique positive. Cas d'égalité pour un produit scalaire. Conséquence : $x\mapsto\sqrt{\langle x,x\rangle}$ est une norme (qualifiée d'euclidienne). Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien pour lequel « ACV $\Longrightarrow$ CV ». Formules de polarisation. Identité du parallélogramme (ou d'Apollonius), la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$ n'est pas euclidienne si $n\geqslant 2$.

• Toute famille orthogonale ne contenant pas 0_{E} est libre. Théorème de Pythagore (réciproque vraie pour une famille de deux vecteurs, mais fausse sinon). Procédé de Gram-Schmidt. Existence de bases orthonormales dans un espace euclidien, théorème de la BON incomplète.

• Vecteurs orthogonaux, parties orthogonales. Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})\perp\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Orthogonal d'une partie A. L'ensemble $\mathrm{A}^\perp$ est un sev fermé. Propriété de décroissance : $\mathrm{A}\subset\mathrm{B}\Longrightarrow\mathrm{B}^\perp\subset\mathrm{A}^\perp$, $\mathrm{E}^\perp=\{0_{\mathrm{E}}\}$ et $\{0_{\mathrm{E}}\}^\perp=\mathrm{E}$. Notation $a^\perp$ au lieu de $\{a\}^\perp$.

• Si F est un sev, alors $\mathrm{F}\cap\mathrm{F}^\perp=\{0_{\mathrm{E}}\}$. Si F est un sev tel que $\mathrm{F}\oplus\mathrm{F}^\perp=\mathrm{E}$, alors $(\mathrm{F}^\perp)^\perp=\mathrm{F}$. Si F est de dimension finie, alors $\mathrm{F}\oplus\mathrm{F}^\perp=\mathrm{E}$. Dimension de $\mathrm{F}^\perp$ si E est euclidien. Sous-espaces affines orthogonaux, perpendiculaires (quand leurs orthogonaux sont orthogonaux), convention des droites affines dans un espace euclidien de dimension $\geqslant 3$: elles sont perpendiculaires quand elles sont sécantes et orthogonales (i.e. perpendiculaires dans le plan affine qui les contient).

• Projection orthogonale (quand $\mathrm{Ker}(p)\perp\mathrm{Im}(p)$). Si p est une projection, alors p est une projection orthogonale ssi $\forall x\in\mathrm{E}$, $\|p(x)\|\leqslant\|x\|$ (Bessel). Expression de $p_{\mathrm{F}}(x)$ dans une BON de F (si $\dim(\mathrm{F})<\infty$). Interprétation de Gram-Schmidt en terme de projection orthogonale. Propriété minimisante : Si $\mathrm{F}\oplus\mathrm{F}^\perp=\mathrm{E}$, alors pour tout x, $d(x,\mathrm{F})=\|x-p_{\mathrm{F}}(x)\|$, de plus $p_{\mathrm{F}}(x)$ est l'unique vecteur de F à vérifier cela.

• Application aux séries de Fourier (vue comme projection orthogonale). Espace $\mathscr{P}_{\mathrm{T}}(\mathrm{N})$ des polynômes trigonométriques de degré $\leqslant\mathrm{N}$ qui sont T-périodiques. Base orthonormale de $\mathscr{P}_{\mathrm{T}}(\mathrm{N})$. Expression de $\mathrm{S}_{\mathrm{N}}(f)$, inégalité de Bessel. Théorèmes de Dirichlet (simple et uniforme, admis), formule de Parseval (admis). Calcul de $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$.

• Forme linéaire représentable : elles sont toutes continues. Le théorème de représentation de Riesz en dimension finie donne un isomorphisme canonique $\flat:\mathrm{E}\to\mathrm{E}^*$. Formes linéaires de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

3 Exercices de TD à savoir refaire

$\boxed{\text{TD 15}}$: 1, 2, 5, 7, 10, 12. $\boxed{\text{TD 16}}$: 1, 2, 3, 4, 15, 19.