Année 2025/26

Khôlle n° 22
semaine du 13 avril

démonstration de cours à savoir refaire :
— démonstrations exigibles pour tout le monde ;
— démonstrations exigibles pour les élèves avancés.
Ce qui n'est pas en couleur doit évidemment être connu (seule la démonstration n'est pas à apprendre).

1 Variables aléatoires discrètes (surtout les exercices)

• Variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$: formule $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geqslant n)$ (dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ et application au calcul de $\mathbb{E}(M)$ si $M = \min(X, Y)$ et X, Y indépendantes suivant $\mathscr{G}(p)$. Série génératrice $\sum P(X = n)t^n$, rayon de convergence $\geqslant 1$, fonction G_X définie au moins sur $[-1, 1]$ et de classe $\mathscr{C}^\infty$ au moins sur $]-1, 1[$. Calcul de G_X pour les lois usuelles. Si $G_X = G_Y$ sur un voisinage de 0, alors X et Y ont même loi (savoir expliquer ce que cela veut dire). Si X et Y sont indépendantes, alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$ sur un voisinage de 0 (on montre avant $G_X(t) = \mathbb{E}(t^X)$). Stabilité des lois de Poisson.

• Fonction génératrice et moments : X admet un moment d'ordre k si et seulement si G_X est k fois dérivable à gauche en 1 et $G'_X(1) = \mathbb{E}(X)$ et $G''_X(1) = \mathbb{E}(X(X-1))$ (démonstration si $R > 1$, admise si $R = 1$). Expression $\mathbb{V}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$ à savoir retrouver rapidement. Variance des lois usuelles.

• Inégalité de Markov, inégalité de Bienaymé-Tchebychev (pénalité pour celles et ceux qui prononcent TchebyTchev !), loi faible des grands nombres (cas $\mathbb{L}^2$).

2 Intégrales à paramètres (surtout le cours)

• Rappel sur l'interversion $\int_{[a,b]} / \lim\limits_{n\to\infty}$ sur un segment en cas de CVU : savoir le démontrer. Théorème de convergence dominée de Lebesgue. Exemple : $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^n + e^x}\,dx$.

• Intégration terme à terme de Lebesgue. Exemple : $\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1}dx = \zeta(2)$.

• Continuité de $x \mapsto \int_I f(t, x)\,dt$ et généralisation : limite en un point x_0 adhérent à J.

• Classe $\mathscr{C}^1$ de $x \mapsto \int_I f(t, x)\,dt$. Généralisation à la classe $\mathscr{C}^k$.

3 Exercices de TD à savoir refaire

$\boxed{\text{TD 14}}$: 1, 3, 4, 5, 6, 7, 12, 22, 23 $\boxed{\text{TD 15}}$: 9 et 11 (faits en cours).