Année 2025/26

Khôlle n° 21
semaine du 6 avril

démonstration de cours à savoir refaire :
— démonstrations exigibles pour tout le monde ;
— démonstrations exigibles pour les élèves avancés.
Ce qui n'est pas en couleur doit évidemment être connu (seule la démonstration n'est pas à apprendre).

1 Variables aléatoires discrètes

• Notion de variable aléatoire discrète. Notations $(X = a)$, $(X \in A)$, $(X \leqslant a)$, etc. Loi P_X d'une VAD X. Composée $f(X)$ par une fonction f quelconque, couple aléatoire, loi conjointe, lois marginales, espace $\mathbb{L}^0_{\text{discr.}}((\Omega, \mathscr{A}), \mathbb{K})$ (ou $\mathbb{L}^0$).

• Si $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ et $\lambda > 0$ sont tels que $p_n \sim \frac{\lambda}{n}$, et si $X_n \rightsquigarrow \mathscr{B}(n, p_n)$ pour tout entier n, alors $\lim\limits_{k\to\infty} P(X_n = k) = P(X = k)$ où $X \rightsquigarrow \mathscr{P}(\lambda)$.

• Fonction de répartition F_X d'une VARD X. Propriétés : La fonction F_X est croissante sur $\mathbb{R}$, continue à droite, $\lim\limits_{+\infty} F_X = 1$, et $\lim\limits_{-\infty} F_X = 0$. Calcul de F_X si $X \rightsquigarrow \mathscr{G}(p)$ et tracé de la courbe.

• Indépendance de deux (ou d'une famille quelconque de) VAD définies sur le même univers, notation $X \perp\!\!\!\perp Y$. Lemme des coalitions : si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$ pour toutes fonctions f et g. Généralisation à $f(X_1, \ldots, X_r) \perp\!\!\!\perp g(X_{r+1}, \ldots, X_n)$, puis à un nombre quelconques de coalitions. Variables i.i.d., notion d'échantillon d'une loi. Existence de tels échantillons (admis).

• Espérance d'une VAD numérique. Calcul de l'espérance pour les lois $\mathscr{U}([\![1, N]\!])$, $\mathscr{B}(n, p)$, $\mathscr{G}(p)$ et $\mathscr{P}(\lambda)$. Théorème de transfert (admis). Linéarité de l'espérance, espace vectoriel $\mathbb{L}^1_{\text{discr.}}((\Omega, \mathscr{A}, P), \mathbb{K})$ (ou $\mathbb{L}^1$). Espérance de XY si $X \perp\!\!\!\perp Y$ sont dans $\mathbb{L}^1$. Si A est un événement, alors $\mathbb{1}_A$ est une VA et $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = P(A)$. Propriétés de l'espérance : positivité, croissance, domination.

• Moment d'ordre k, lemme « $\mathbb{L}^2\mathbb{L}^2 \subset \mathbb{L}^1$ » puis : $\mathbb{L}^2(\Omega)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{L}^1(\Omega)$. Variance, écart-type, formule de König-Huygens, $\mathbb{V}(aX + b)$ et σ_{aX+b}. Notion de variable centrée, réduite, variable $X^* = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma_X}$. Identité de Bienaymé : $\mathbb{V}(X + Y)$ si $X \perp\!\!\!\perp Y$.

• Covariance : bilinéaire symétrique positive. Inégalités de Cauchy-Schwarz concernant $|\mathbb{E}(XY)|$ et $|\text{Cov}(X, Y)|$. Coefficient de corrélation $\rho_{X,Y}$. Identité développant $\mathbb{V}(X_1 + \ldots + X_n)$.

• Variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$: formule $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(X \geqslant n)$ (dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ et application au calcul de $\mathbb{E}(M)$ si $M = \min(X, Y)$ et X, Y indépendantes suivant $\mathscr{G}(p)$. Série génératrice $\sum P(X = n)t^n$, rayon de convergence $\geqslant 1$, fonction G_X définie au moins sur $[-1, 1]$ et de classe $\mathscr{C}^\infty$ au moins sur $]-1, 1[$. Calcul de G_X pour les lois usuelles. Si $G_X = G_Y$ sur un voisinage de 0, alors X et Y ont même loi (savoir expliquer ce que cela veut dire). Si X et Y sont indépendantes, alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$ sur un voisinage de 0 (on montre avant $G_X(t) = \mathbb{E}(t^X)$). Stabilité des lois de Poisson.

• Fonction génératrice et moments : X admet un moment d'ordre k si et seulement si G_X est k fois dérivable à gauche en 1 et $G'_X(1) = \mathbb{E}(X)$ et $G''_X(1) = \mathbb{E}(X(X-1))$ (démonstration si $R > 1$, admise si $R = 1$). Expression $\mathbb{V}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$ à savoir retrouver rapidement. Variance des lois usuelles.

• Inégalité de Markov, inégalité de Bienaymé-Tchebychev (pénalité pour celles et ceux qui prononcent TchebyTchev !), loi faible des grands nombres (cas $\mathbb{L}^2$).

2 Exercices de TD à savoir refaire

$\boxed{\text{TD 14}}$: 1, 3, 4, 5, 6, 7, 22