Année 2024/25

Khôlle n° 21
semaine du 31 mars

En souligné : démonstration de cours à savoir refaire.

1 Séries entières

Les exercices essentiellement (mais le cours doit être su). Utilisation d'une équation différentielle pour trouver un DSE : DSE de $(1+x)^\alpha$

2 Variables aléatoires discrètes

• Notion de VAD à valeurs dans un ensemble. Événements $(\mathrm{X}=x)$, $(\mathrm{X}\in \mathrm{A})$. La famille $((\mathrm{X}=x))_{x\in \mathrm{Im}(\mathrm{X})}$ est un système complet (fini ou dénombrable) d'événements. Si $\mathrm{U}\subset \mathrm{E}$, alors $(\mathrm{X}\in \mathrm{U}) \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{X}^{-1}\langle \mathrm{U}\rangle \in \mathscr{A}$, et l'application $\mathrm{U}\mapsto (\mathrm{X}\in \mathrm{U})$ est une mesure de probabilité notée P_X ($=$ la loi de X) sur $(\mathrm{Im}(\mathrm{X}),\mathscr{P}(\mathrm{Im}(\mathrm{X}))$. Variables uniformes, binomiales, géométriques, de Poisson. La notation $\mathrm{X}\rightsquigarrow \mathscr{P}(\lambda)$ signifie $\mathrm{P}_\mathrm{X}=\mathscr{P}(\lambda)$. Théorème d'extension de Kolmogorov (admis). L'image $f(\mathrm{X})$ d'une VARD par une fonction f est une VARD. L'ensemble des VAD à valeurs dans $\mathbb{K}$ est sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\Omega,\mathbb{K})$. Notation $\mathbb{L}^0_{\text{discr.}}((\Omega,\mathscr{A}),\mathbb{K})$ (ou $\mathbb{L}^0(\Omega)$).

• Fonction de répartition F_X d'une VARD X. Propriétés : La fonction F_X est croissante sur $\mathbb{R}$, continue à droite, $\lim\limits_{+\infty}\mathrm{F}_\mathrm{X}=1$, et $\lim\limits_{-\infty}\mathrm{F}_\mathrm{X}=0$. Calcul de F_X si $\mathrm{X}\rightsquigarrow \mathscr{G}(p)$.

• Indépendance de deux VAD définies sur le même univers, notation $\mathrm{X}\perp\!\!\!\perp \mathrm{Y}$, indépendance mutuelle d'une famille quelconque de VAD (sur le même univers). Lemme des coalitions : $f(\mathrm{X}_1,\dots,\mathrm{X}_r)\perp\!\!\!\perp g(\mathrm{X}_{r+1},\dots,\mathrm{X}_n)$. Notion d'échantillon d'une loi. Existence de tels échantillons (admis). Loi conjointe, lois marginales.

• Espérance d'une VAD numérique. Calcul d'espérance pour les lois $\mathscr{U}([\![1,\mathrm{N}]\!])$, $\mathscr{B}(n,p)$, $\mathscr{G}(p)$ et $\mathscr{P}(\lambda)$.

3 Exercices de TD à savoir refaire

$\boxed{\text{TD 13}}$: 1, 3, 4, 5, 8, 10, 14, 18, 18