Année 2023/24

Khôlle n° 21
semaine du 25 mars

1 Séries entières

Les exercices.

2 Variables aléatoires discrètes

• Notion de VAD à valeurs dans un ensemble. Évènements $(\mathrm{X}=x)$, $(\mathrm{X}\in\mathrm{A})$. La famille $((\mathrm{X}=x))_{x\in\mathrm{Im}(\mathrm{X})}$ est une partition de Ω. Si $\mathrm{U}\subset\mathrm{E}$, alors $(\mathrm{X}\in\mathrm{U})\overset{\text{déf}}{=}\mathrm{X}^{-1}\langle\mathrm{U}\rangle\in\mathscr{A}$, et l'application $\mathrm{U}\mapsto(\mathrm{X}\in\mathrm{U})$ est une mesure de probabilité notée P_{X} (= la loi de X) sur $(\mathrm{Im}(\mathrm{X}),\mathscr{P}(\mathrm{Im}(\mathrm{X}))$. Variables uniformes, binomiales, géométriques, de Poisson. La notation $\mathrm{X}\rightsquigarrow\mathscr{P}(\lambda)$ signifie $\mathrm{P}_{\mathrm{X}}=\mathscr{P}(\lambda)$. Théorème d'extension de Kolmogorov (admis). L'image $f(\mathrm{X})$ d'une VARD par une fonction f est une VARD. L'ensemble des VAD à valeurs dans $\mathbb{K}$ est sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\Omega,\mathbb{K})$. Notation $\mathbb{L}^0_{\text{discr.}}((\Omega,\mathscr{A}),\mathbb{K})$ (ou $\mathbb{L}^0(\Omega)$).

• Fonction de répartition F_{X} d'une VARD X. Propriétés : La fonction F_{X} est croissante sur $\mathbb{R}$, continue à droite, $\lim\limits_{+\infty}\mathrm{F}_{\mathrm{X}}=1$, et $\lim\limits_{-\infty}\mathrm{F}_{\mathrm{X}}=0$. Calcul de F_{X} si $\mathrm{X}\rightsquigarrow\mathscr{G}(p)$.

• Indépendance de deux VAD définies sur le même univers, notation $\mathrm{X}\perp\!\!\!\perp\mathrm{Y}$, indépendance mutuelle d'une famille quelconque de VAD (sur le même univers). Lemme des coalitions : $f(\mathrm{X}_1,\dots,\mathrm{X}_r)\perp\!\!\!\perp g(\mathrm{X}_{r+1},\dots,\mathrm{X}_n)$ (démontré pour $n=2$ et $r=1$). Notion d'échantillon d'une loi. Existence de tels échantillons (admis). Loi conjointe, lois marginales.

• Espérance d'une VAD numérique. Sous-espace $\mathbb{L}^1_{\text{discr.}}((\Omega,\mathscr{A},\mathrm{P}),\mathbb{K})$ (ou $\mathbb{L}^1(\Omega)$). Linéarité (admise), positivité, croissance, domination. Théorème de transfert (admis). Si $\mathrm{X}\perp\!\!\!\perp\mathrm{Y}$ sont dans $\mathbb{L}^1(\Omega)$, alors $\mathrm{XY}\in\mathbb{L}^1(\Omega)$ et $\mathbb{E}(\mathrm{XY})=\mathbb{E}(\mathrm{X})\mathbb{E}(\mathrm{Y})$ (admis).

• Moment d'ordre k d'une VAD réelle, ensemble $\mathbb{L}^k(\Omega)$. Inclusion $\mathbb{L}^2\subset\mathbb{L}^1$. Lemme « $\mathbb{L}^2\cdot\mathbb{L}^2\subset\mathbb{L}^1$ ». L'ensemble $\mathbb{L}^2(\Omega)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\Omega,\mathbb{R})$. Calcul des espérances des lois usuelles : $\mathscr{U}(1,\mathrm{N})$, $\mathscr{B}(n,p)$, $\mathscr{G}(p)$ et $\mathscr{P}(\lambda)$.

• Variance $\mathbb{V}(\mathrm{X})$ d'une VARD $\mathrm{X}\in\mathbb{L}^2(\Omega)$. Écart-type σ_{X}. $\mathbb{V}(\mathrm{X})=0$ ssi X est presque sûrement constante. Formule de König-Huygens : $\mathbb{V}(\mathrm{X})=\mathbb{E}(\mathrm{X}^2)-\mathbb{E}(\mathrm{X})^2$. Variance et écart-type de $a\mathrm{X}+b$. Formule de Bienaymé : Si $\mathrm{X}\perp\!\!\!\perp\mathrm{Y}$, alors $\mathbb{V}(\mathrm{X}+\mathrm{Y})=\mathbb{V}(\mathrm{X})+\mathbb{V}(\mathrm{Y})$ (réciproque fausse). Covariance définie comme étant $\mathbb{E}(\mathrm{XY})-\mathbb{E}(\mathrm{X})\mathbb{E}(\mathrm{Y})$: c'est une forme bilinéaire symétrique positive sur $\mathbb{L}^2(\Omega,\mathbb{R})$. Inégalités de Cauchy-Schwarz (sans cas d'égalité) concernant $|\mathbb{E}(\mathrm{XY})|$ et $|\mathrm{Cov}(\mathrm{X},\mathrm{Y})|$. Coefficient de corrélation $\rho_{\mathrm{X},\mathrm{Y}}\in[-1,1]$.

• Variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. Formule alternative de l'espérance : $\mathbb{E}(\mathrm{X})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{P}(\mathrm{X}\geqslant n)$. Série génératrice $\sum\mathrm{P}(\mathrm{X}=n)t^n$: son rayon est $\geqslant 1$. Sa somme G_{X} est au moins définie sur $[-1,1]$, $\mathrm{G}_{\mathrm{X}}(1)=1$, et est de classe $\mathscr{C}^\infty$ au moins sur $]-1,1[$. Calcul pour les lois usuelles. La restriction de G_{X} à un voisinage de 0 caractérise la loi de X. Formule $\mathrm{G}_{\mathrm{X}}(t)=\mathbb{E}(t^{\mathrm{X}})$. Si X, Y sont indépendantes, $\mathrm{G}_{\mathrm{X}+\mathrm{Y}}=\mathrm{G}_{\mathrm{X}}\mathrm{G}_{\mathrm{Y}}$.

• Si $\mathrm{R}>1$, $\mathrm{G}'_{\mathrm{X}}(1)=\mathbb{E}(\mathrm{X})$. Si $\mathrm{R}=1$, $\mathrm{X}\in\mathbb{L}^1(\Omega)$ ssi G_{X} est dérivable en 1^- et dans ce cas $\mathbb{E}(\mathrm{X})=\mathrm{G}'_{\mathrm{X}}(1^-)$. Généralisation : $\mathrm{X}\in\mathbb{L}^k(\Omega)$ ssi G_{X} est k fois dérivable en 1^- et dans ce cas $\mathbb{E}(\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)\dots(\mathrm{X}-k+1))=\mathrm{G}^{(k)}_{\mathrm{X}}(1^-)$. Calcul de la variance des lois usuelles au moyen de l'égalité $\mathbb{V}(\mathrm{X})=\mathrm{G}''_{\mathrm{X}}(1)+\mathrm{G}'_{\mathrm{X}}(1)-\mathrm{G}'_{\mathrm{X}}(1)^2$.

• Lemme « $\mathrm{P}(\mathrm{A})=\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\mathrm{A}})$ ». Inégalité de Markov, inégalité de Bienaymé-Tchebychev. On constate que l'inégalité est très large avec la loi géométrique $\mathscr{G}(0.2)$. Loi faible des grands nombres, notion de moyenne empirique, de convergence en probabilité. Exemple d'application (recherche de la taille d'un échantillon).

3 Exercices de TD à savoir refaire

$\boxed{\text{TD 13}}$: 3, 4, 5, 16, 17, 18 (sans la Q3), 19, 23 (sauf Q6). $\boxed{\text{TD 14}}$: 2, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 15, 18, 19.