



démonstration de cours à savoir refaire :

- démonstrations exigibles pour tout le monde ;
- démonstrations exigibles pour les élèves avancés.

Ce qui n'est pas en couleur doit évidemment être connu (seule la démonstration n'est pas à apprendre).

## 1 Séries entières

- Fonctions  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  développables en série entière (ou analytique, ou de classe  $\mathcal{C}^\omega$ ) en 0. **Unicité du DSE<sub>0</sub> : la série entière ne peut être que  $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$** , et identification des coefficients (démonstration dans le cas réel, admis dans le cas complexe : cf. formule de Cauchy faite en fin de cours). DSE<sub>0</sub> de  $\frac{1}{1-z}$ ,  $e^z$ ,  $\ln(1+x)$ ,  $\text{Arctan}(x)$ ,  $\cos(x)$ ,  $\sin(x)$ ,  $\text{ch}(x)$  et  $\text{sh}(x)$  à **connaître parfaitement**.

- Méthode de l'équation différentielle illustrée pour **trouver le DSE<sub>0</sub> de  $(1+x)^\alpha$**  (où  $\alpha$  est une constante complexe) : attention au cas  $\alpha \in \mathbb{N}$ . Application au DSE<sub>0</sub> de Arcsin (peut être posé en exercice 1).

## 2 Variables aléatoires discrètes (cours uniquement)

- Notion de VAD à valeurs dans un ensemble. Événements  $(X = x)$ ,  $(X \in A)$ . La famille  $((X = x))_{x \in \text{Im}(X)}$  est un système complet (fini ou dénombrable) d'événements. Si  $U \subset E$ , alors  $(X \in U) \stackrel{\text{def}}{=} X^{-1}(U) \in \mathcal{A}$ , et l'application  $U \mapsto (X \in U)$  est une mesure de probabilité notée  $P_X$  (= la loi de  $X$ ) sur  $(\text{Im}(X), \mathcal{P}(\text{Im}(X)))$ . Variables uniformes, binomiales, géométriques, de Poisson. La notation  $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$  signifie  $P_X = \mathcal{P}(\lambda)$ . Existence de variables aléatoires suivant une loi donnée (Kolmogorov, admis).

- Si  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$  et  $\lambda > 0$  sont tels que  $p_n \sim \frac{\lambda}{n}$ , et si  $X_n \rightsquigarrow \mathcal{B}(n, p_n)$  pour tout entier  $n$ , alors  $\lim_{k \rightarrow \infty} P(X_n = k) = P(X = k)$  où  $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$ .

- L'image  $f(X)$  d'une VARD par une fonction  $f$  est une VARD. Si  $Z : \Omega \rightarrow E_1 \times E_2$  est une VAD, ses composantes sont des VAD, et si  $X_1 : \Omega \rightarrow E_1$  et  $X_2 : \Omega \rightarrow E_2$  sont des VAD, alors  $\omega \mapsto (X_1(\omega), X_2(\omega))$  est une VAD. L'ensemble des VAD à valeurs dans  $\mathbb{K}$  est sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{K})$ . Notation  $\mathbb{L}_{\text{discr.}}^0((\Omega, \mathcal{A}), \mathbb{K})$  (ou  $\mathbb{L}^0$ ).

- Fonction de répartition  $F_X$  d'une VARD  $X$ . Propriétés : La fonction  $F_X$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ , continue à droite,  $\lim_{+\infty} F_X = 1$ , et  $\lim_{-\infty} F_X = 0$ . Calcul de  $F_X$  si  $X \rightsquigarrow \mathcal{G}(p)$  et tracé de la courbe.

- Indépendance de deux (ou d'une famille quelconque de) VAD définies sur le même univers, notation  $X \perp\!\!\!\perp Y$ . Lemme des coalitions : si  $X \perp\!\!\!\perp Y$ , alors  $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$  pour toutes fonctions  $f$  et  $g$ . Généralisation à  $f(X_1, \dots, X_r) \perp\!\!\!\perp g(X_{r+1}, \dots, X_n)$ , puis à un nombre quelconques de coalitions. Variables i.i.d., notion d'échantillon d'une loi. Existence de tels échantillons (admis). Loi conjointe, lois marginales.

- Espérance d'une VAD numérique. Calcul de l'espérance pour les lois  $\mathcal{U}(\llbracket 1, N \rrbracket)$ ,  $\mathcal{B}(n, p)$ ,  $\mathcal{G}(p)$  et  $\mathcal{P}(\lambda)$ . Théorème de transfert (admis). Linéarité de l'espérance, espace vectoriel  $\mathbb{L}_{\text{discr.}}^1((\Omega, \mathcal{A}, P), \mathbb{K})$  (ou  $\mathbb{L}^1$ ). Espérance de  $XY$  si  $X \perp\!\!\!\perp Y$  sont dans  $\mathbb{L}^1$ . Si  $A$  est un événement, alors  $\mathbb{1}_A$  est une VA et  $E(\mathbb{1}_A) = P(A)$ . Propriétés de l'espérance : positivité, croissance, domination.

- Moment d'ordre  $k$ , lemme «  $\mathbb{L}^2 \mathbb{L}^2 \subset \mathbb{L}^1$  »,  $\mathbb{L}^2(\Omega)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{L}^1(\Omega)$ . Variance, écart-type, formule de König-Huygens,  $V(aX + b)$  et  $\sigma_{aX+b}$ . Notion de variable centrée, réduite, variable  $X^* = \frac{X - E(X)}{\sigma_X}$ . Identité de Bienaymé :  $V(X + Y)$  si  $X \perp\!\!\!\perp Y$ .

- Covariance : bilinéaire symétrique positive. Inégalités de Cauchy-Schwarz concernant  $|E(XY)|$  et  $|\text{Cov}(X, Y)|$ . Coefficient de corrélation  $\rho_{X,Y}$ . Identité développant  $V(X_1 + \dots + X_n)$ .

## 3 Exercices de TD à savoir refaire

TD 13 : 1, 2, 4 (fait en cours), 5, 7, 8, 10 (Q1 faite en cours), 24 (difficile)