Année 2024/25

Khôlle n° 20
semaine du 24 mars

En souligné : démonstration de cours à savoir refaire.

1 Espaces probabilisés

Surtout les exercices, mais le cours doit être su.

2 Séries entières

• Lemme d'Abel. Le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est $\sup\{r \geqslant 0 \mid (a_n r^n) \text{ bornée}\}$ par définition. Propriété fondamentale du rayon de CV : si $|z| < \mathrm{R}_a$, la série numérique $\sum a_n z^n$ CVA, si $|z| > \mathrm{R}_a$, la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement, et on ne peut rien dire si $|z| = \mathrm{R}_a$. Exemples à connaître : $\sum z^n$, $\sum \frac{z^n}{n!}$, $\sum n! z^n$.

• Le rayon de $\sum a_n z^n$ est le même que celui de $\sum a_n z^{n+n_0}$ ou de $\sum \lambda a_n z^n$ (si $\lambda \neq 0$) ou encore de $\sum |a_n| z^n$. Cas où (a_n) presque nulle : le rayon vaut $+\infty$. Si $\sum a_n z_0^n$ CV, alors $\mathrm{R}_a \geqslant |z_0|$, sinon $\mathrm{R}_a \leqslant |z_0|$.

• « Décroissance » du rayon de convergence : Si $|a_n| \leqslant |b_n|$ à partir d'un certain rang, alors $\mathrm{R}_a \geqslant \mathrm{R}_b$. Conséquences : si $a_n = \mathrm{O}(b_n)$ ou si $a_n = o(b_n)$, alors $\mathrm{R}_a \geqslant \mathrm{R}_b$. Cas particulier où (a_n) est bornée. Si $a_n \sim b_n$, alors $\mathrm{R}_a = \mathrm{R}_b$.

• Critère de D'Alembert adapté aux séries entières : si $z \in \mathbb{C}^*$, on pose $u_n = a_n z^n$, etc. Savoir trouver par cette méthode le rayon de convergence de $\sum \pi^n n^{2025} z^{2n}$.

• Somme et produit (de Cauchy) de deux séries entières. Si $\mathrm{R}_a \neq \mathrm{R}_a$, le rayon de la somme est $\min(\mathrm{R}_a, \mathrm{R}_b)$, mais cela n'est pas vrai pour le produit.

• Une série entière (réelle ou complexe) de rayon non nul converge normalement localement. En général, la CVN n'est pas globale. Continuité de la somme d'une série entière réelle sur son intervalle ouvert de convergence.

• Les séries entières $\sum a_n z^n$ er $\sum n a_n z^n$ ont même rayon. Conséquence : pour tout réel α, $\sum a_n z^n$ et $\sum n^\alpha a_n z^n$ ont même rayon. Dans le cas réel : dérivée d'une fonction somme de série entière. Caractère $\mathscr{C}^\infty$. Primitives de la somme d'une série entière réelle, application à $\ln(1+x)$ et $\mathrm{Arctan}(x)$.

• Fonctions développables en série entière en 0. Unicité du DSE_0 et identification des coefficients (démonstration dans le cas réel, admis dans le cas complexe). DSE en 0 de $\frac{1}{1-z}$, e^z, $\ln(1+x)$, $\mathrm{Arctan}(x)$, $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\mathrm{ch}(x)$ et $\mathrm{sh}(x)$ à connaître parfaitement.

3 Exercices de TD à savoir refaire

$\boxed{\text{TD 12}}$: 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16. $\boxed{\text{TD 13}}$: 1, 3, 4, 8, 10.