Année 2023/24

Khôlle n° 20
semaine du 18 mars

1 Séries entières

• Lemme d'Abel. Le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est $\sup\{r \geqslant 0 \mid (a_n r^n) \text{ bornée}\}$ par définition. Propriété fondamentale du rayon de CV : si $|z| < \mathrm{R}_a$, la série numérique $\sum a_n z^n$ CVA, si $|z| > \mathrm{R}_a$, la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement, et on ne peut rien dire si $|z| = \mathrm{R}_a$. Exemples à connaître : $\sum z^n$, $\sum \frac{z^n}{n!}$, $\sum n! z^n$.

• Le rayon de $\sum a_n z^n$ est le même que celui de $\sum a_n z^{n+n_0}$ ou de $\sum \lambda a_n z^n$ (si $\lambda \neq 0$) ou encore de $\sum |a_n| z^n$. Cas où (a_n) presque nulle : le rayon vaut $+\infty$. Si $\sum a_n z_0^n$ CV, alors $\mathrm{R}_a \geqslant |z_0|$, sinon $\mathrm{R}_a \leqslant |z_0|$.

• Règles de comparaison : Si $a_n \leqslant b_n$ à partir d'un certain rang, alors $\mathrm{R}_a \geqslant \mathrm{R}_b$. Conséquences : si $a_n = \mathrm{O}(b_n)$ ou si $a_n = o(b_n)$, alors $\mathrm{R}_a \geqslant \mathrm{R}_b$. Cas particulier où (a_n) est bornée. Si $a_n \sim b_n$, alors $\mathrm{R}_a = \mathrm{R}_b$.

• Critère de D'Alembert adapté aux séries entières : si $z \in \mathbb{C}^*$, on pose $u_n = a_n z^n$, etc. Mise en garde pour les séries lacunaires.

• Somme et produit (de Cauchy) de deux séries entières. Si $\mathrm{R}_a \neq \mathrm{R}_a$, le rayon de la somme est $\min(\mathrm{R}_a, \mathrm{R}_b)$, mais cela n'est pas vrai pour le produit.

• Une série entière réelle de rayon non nul converge normalement sur tout intervalle fermé inclus dans l'intervalle ouvert de convergence. Adaptation aux séries entières complexes. En général, la CVN n'est pas globale. Continuité de la somme d'une série entière réelle sur son intervalle ouvert de convergence. Généralisation pour les séries complexes.

• Dérivée (formelle) d'une série entière (complexe ou réelle). Une série entière et sa série entière dérivée ont même rayon. Conséquence : pour tout réel α, $\sum a_n z^n$ et $\sum n^\alpha a_n z^n$ ont même rayon. Dans le cas réel : dérivée d'une fonction somme de série entière. Caractère $\mathscr{C}^\infty$. Primitivation d'une série entière réelle, application à $\ln(1+x)$ et $\mathrm{Arctan}(x)$.

• Fonctions développables en série entière en 0. Unicité du DSE_0 et identification des coefficients (démonstration dans le cas réel, admis dans le cas complexe). DSE en 0 de $\frac{1}{1-z}$, e^z, $\ln(1+x)$, $\mathrm{Arctan}(x)$, $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\mathrm{ch}(x)$ et $\mathrm{sh}(x)$ à connaître parfaitement.

• Utilisation des séries entières dans les équations différentielles linéaires. Application : DSE de $(1+x)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$ (notation $\binom{\alpha}{n}$). Cas particulier où $\alpha \in \mathbb{N}$. Application au DSE_0 de Arcsin (il n'est pas à apprendre par cœur).

2 Variables aléatoires discrètes (cours uniquement)

• Notion de VAD à valeurs dans un ensemble. Évènements $(\mathrm{X} = x)$, $(\mathrm{X} \in \mathrm{A})$. La famille $((\mathrm{X} = x))_{x \in \mathrm{Im}(\mathrm{X})}$ est une partition de Ω. Si $\mathrm{U} \subset \mathrm{E}$, alors $(\mathrm{X} \in \mathrm{U}) \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{X}^{-1}\langle \mathrm{U} \rangle \in \mathscr{A}$, et l'application $\mathrm{U} \mapsto (\mathrm{X} \in \mathrm{U})$ est une mesure de probabilité notée $\mathrm{P_X}$ (= la loi de X) sur $(\mathrm{Im}(\mathrm{X}), \mathscr{P}(\mathrm{Im}(\mathrm{X}))$. Variables uniformes, binomiales, géométriques, de Poisson. La notation $\mathrm{X} \rightsquigarrow \mathscr{P}(\lambda)$ signifie $\mathrm{P_X} = \mathscr{P}(\lambda)$. Théorème d'extension de Kolmogorov (admis). L'image $f(\mathrm{X})$ d'une VARD par une fonction f est une VARD. L'ensemble des VAD à valeurs dans $\mathbb{K}$ est sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\Omega, \mathbb{K})$. Notation $\mathbb{L}^0_{\text{discr.}}((\Omega, \mathscr{A}), \mathbb{K})$ (ou $\mathbb{L}^0(\Omega)$).

• Fonction de répartition $\mathrm{F_X}$ d'une VARD X. Propriétés : La fonction $\mathrm{F_X}$ est croissante sur $\mathbb{R}$, continue à droite, $\lim\limits_{+\infty} \mathrm{F_X} = 1$, et $\lim\limits_{-\infty} \mathrm{F_X} = 0$. Calcul de $\mathrm{F_X}$ si $\mathrm{X} \rightsquigarrow \mathscr{G}(p)$.

• Indépendance de deux VAD définies sur le même univers, notation $\mathrm{X} \perp\!\!\!\perp \mathrm{Y}$, indépendance mutuelle d'une famille quelconque de VAD (sur le même univers). Lemme des coalitions : $f(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_r) \perp\!\!\!\perp g(\mathrm{X}_{r+1}, \ldots, \mathrm{X}_n)$ (démontré pour $n = 2$ et $r = 1$). Notion d'échantillon d'une loi. Existence de tels échantillons (admis). Loi conjointe, lois marginales.

• Espérance d'une VAD à valeurs dans $\mathbb{K}$. Sous-espace $\mathbb{L}^1_{\text{discr.}}((\Omega, \mathscr{T}, \mathrm{P}), \mathbb{K})$ (ou $\mathbb{L}^1(\Omega)$). Linéarité, positivité, croissance, domination. Théorème de transfert. Si $\mathrm{X} \perp\!\!\!\perp \mathrm{Y}$ sont dans $\mathbb{L}^1(\Omega)$, alors $\mathrm{XY} \in \mathbb{L}^1(\Omega)$ et $\mathbb{E}(\mathrm{XY}) = \mathbb{E}(\mathrm{X})\mathbb{E}(\mathrm{Y})$.

3 Exercices de TD à savoir refaire

$\boxed{\text{TD 13}}$: 3, 4, 5, 16, 17, 18 (sans la Q3), 19