Année 2024/25

Khôlle n° 19
semaine du 17 mars

En souligné : démonstration de cours à savoir refaire.

1 Ensembles dénombrables et familles sommables

• Rappels sur les ensembles finis.

• Ensembles dénombrables, $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}^2$ sont dénombrables, mais $\mathbb{R}$ ne l'est pas. Les parties de $\mathbb{N}$ sont finies ou dénombrables. Il n'existe aucune surjection de E sur $\mathscr{P}(\mathrm{E})$ (Cantor), conséquences : $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (qui modélise l'univers d'un jeu de pile ou face infini) n'est pas dénombrable, il n'existe pas d'ensemble dont les éléments seraient tous les ensembles (Russell).

• Produit cartésien de deux ensembles dénombrables. S'il existe une injection $i : \mathrm{E} \to \mathbb{N}$, alors E est fini ou dénombrable. S'il existe une surjection $s : \mathbb{N} \to \mathrm{E}$, alors E est fini ou dénombrable. L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dénombrable. Réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables.

• Famille de réels positifs sommable, notation $\sum_{x \in \mathrm{X}} a_x$. Le support d'une telle famille est fini ou dénombrable. Famille de réels sommable, puis famille de complexes sommable. Propriétés admises : cohérence avec la théorie des séries ACV, linéarité de la somme, comparaison avec $\leqslant$, convergence commutative, sommation par paquets (valable sans condition pour les familles de réels positifs), théorème de Fubini (Idem).

2 Espaces probabilisés

• Tribu sur un ensemble non vide, espace mesurable. Propriété des tribus : stable par réunion finie, intersection finie ou dénombrable, par différence ensembliste. Mesure de probabilité sur un espace mesurable, espace probabilisé. <u>Propriétés : $\mathrm{P}(\mathrm{A}^c)$, croissance et $\mathrm{P}(\mathrm{B} \setminus \mathrm{A})$ si $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$, $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$</u>. Vocabulaire : événement presque sûr, presque impossible, partie négligeable, tribu complète. Notion de propriété vraie presque sûrement : savoir expliquer ce que veut dire « $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est presque sûrement positive ».

• <u>Théorème de continuité croissante</u>, de continuité décroissante. Conséquence : $\mathrm{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{A}_n\right) = \lim_{\mathrm{N} \to \infty} \mathrm{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\mathrm{N}} \mathrm{A}_n\right)$ (idem avec $\cap$). <u>Inégalité de Boole (sous-additivité)</u>.

• Distribution de probabilité $(p_x)_{x \in \mathrm{E}}$ sur un ensemble fini ou dénombrable E. <u>Il existe une unique mesure de probabilité sur $(\mathrm{E}, \mathscr{P}(\mathrm{E}))$ telle que $\mathrm{P}(\{x\}) = p_x$ pour tout $x \in \mathrm{E}$</u>. Exemples fondamentaux : **loi uniforme** $\mathscr{U}(\mathrm{E})$ si E est fini, **loi binomiale** $\mathscr{B}(n,p)$ et interprétation, cas $n = 1$ (Bernoulli), **loi géométrique** $\mathscr{G}(p)$ et interprétation, **loi de Poisson** $\mathscr{P}(\lambda)$. <u>Si $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ est telle que $p_n \sim \frac{\lambda}{n}$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \to \infty} \mathscr{B}(n, p_n)(\{k\}) = \mathscr{P}(\lambda)(\{k\})$</u> (convergence en loi de $\mathscr{B}(n, p_n)$ vers $\mathscr{P}(\lambda)$).

• Probabilité conditionnelle, notation $\mathrm{P}_\mathrm{B}(\mathrm{A})$ (ou $\mathrm{P}(\mathrm{A} \mid \mathrm{B})$ mais avoir compris qu'il n'y a pas d'événement « A sachant B »). <u>L'application P_B est une mesure de probabilité</u>. Événements indépendants, cas d'une famille quelconque. <u>Si A et B sont indépendants, A^c et B aussi</u>. Généralisation à une famille quelconque d'événements. Formule des probabilités composées : $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}_\mathrm{A}(\mathrm{B})\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{P}_\mathrm{B}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B})$. Savoir placer les probabilités conditionnelles sur un arbre pondérés.

• Système complet dénombrable d'événements, ou quasi complet. Formule des probabilités totales (<u>démontrée pour un système complet</u>), et formule de Bayes.

3 Exercices de TD à savoir refaire

$\boxed{\text{TD 12}}$: 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16.