Année 2023/24

Khôlle n° 19
semaine du 11 mars

En souligné : démonstration de cours à savoir refaire.

1 Espaces probabilisés

Exercices essentiellement mais **tous les théorèmes et toutes les définitions sont à connaître**.

2 Séries entières (cours)

• Lemme d'Abel. Le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est $\sup\{r \geqslant 0 \mid (a_n r^n) \text{ bornée}\}$ par définition. Propriété fondamentale du rayon de CV : si $|z| < \mathrm{R}_a$, la série numérique $\sum a_n z^n$ CVA, si $|z| > \mathrm{R}_a$, la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement, et on ne peut rien dire si $|z| = \mathrm{R}_a$. Exemples à connaître : $\sum z^n$, $\sum \frac{z^n}{n!}$, $\sum n! z^n$.

• Le rayon de $\sum a_n z^n$ est le même que celui de $\sum a_n z^{n+n_0}$ ou de $\sum \lambda a_n z^n$ (si $\lambda \neq 0$) ou encore de $\sum |a_n| z^n$. Cas où (a_n) presque nulle : le rayon vaut $+\infty$. Si $\sum a_n z_0^n$ CV, alors $\mathrm{R}_a \geqslant |z_0|$, sinon $\mathrm{R}_a \leqslant |z_0|$.

• Règles de comparaison : Si $a_n \leqslant b_n$ à partir d'un certain rang, alors $\mathrm{R}_a \geqslant \mathrm{R}_b$. Conséquences : si $a_n = \mathrm{O}(b_n)$ ou si $a_n = o(b_n)$, alors $\mathrm{R}_a \geqslant \mathrm{R}_b$. Cas particulier où (a_n) est bornée. Si $a_n \sim b_n$, alors $\mathrm{R}_a = \mathrm{R}_b$.

• Critère de D'Alembert adapté aux séries entières : si $z \in \mathbb{C}^*$, on pose $u_n = a_n z^n$, etc. Mise en garde pour les séries lacunaires.

• Somme et produit (de Cauchy) de deux séries entières. Si $\mathrm{R}_a \neq \mathrm{R}_a$, le rayon de la somme est $\min(\mathrm{R}_a, \mathrm{R}_b)$, mais cela n'est pas vrai pour le produit.

• Une série entière réelle de rayon non nul converge normalement sur tout intervalle fermé inclus dans l'intervalle ouvert de convergence. Adaptation aux séries entières complexes. En général, la CVN n'est pas globale. Continuité de la somme d'une série entière réelle sur son intervalle ouvert de convergence. Généralisation pour les séries complexes.

• Dérivée (formelle) d'une série entière (complexe ou réelle). Une série entière et sa série entière dérivée ont même rayon. Conséquence : pour tout réel α, $\sum a_n z^n$ et $\sum n^\alpha a_n z^n$ ont même rayon. Dans le cas réel : dérivée d'une fonction somme de série entière. Caractère $\mathscr{C}^\infty$. Primitivation d'une série entière réelle, application à $\ln(1+x)$ et $\operatorname{Arctan}(x)$.

• Fonctions développables en série entière en 0. Unicité du DSE_0 et identification des coefficients (démonstration dans le cas réel, admis dans le cas complexe). DSE en 0 de $\frac{1}{1-z}$, e^z, $\ln(1+x)$, $\operatorname{Arctan}(x)$, $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\operatorname{ch}(x)$ et $\operatorname{sh}(x)$ à connaître parfaitement.

• Utilisation des séries entières dans les équations différentielles linéaires. Application : DSE de $(1+x)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$ (notation $\binom{\alpha}{n}$). Cas particulier où $\alpha \in \mathbb{N}$. Application au DSE_0 de Arcsin (il n'est pas à apprendre par cœur).

3 Exercices de TD à savoir refaire

$\boxed{\text{TD 12}}$: 1, 2, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 17, 19. Pour les plus à l'aise : 20, 21, 22.