



En souligné : démonstration de cours à savoir refaire.

1 Suites et séries de fonctions

Exercices.

2 Espaces probabilisés

- Rappels sur les ensembles finis : définition et propriété fondamentale des cardinaux, cardinal d'une partie, d'une réunion, de l'ensemble des parties, de l'ensemble des parties ayant k éléments, d'un produit cartésien, de l'ensemble des applications, de l'ensemble des permutations, de l'ensemble des injections.

- Ensembles dénombrables, \mathbb{N}^* , \mathbb{Z} et \mathbb{N}^2 sont dénombrables, mais \mathbb{R} ne l'est pas. Les parties de \mathbb{N} sont finies ou dénombrables. Il n'existe aucune surjection de \mathbb{E} sur $\mathcal{P}(\mathbb{E})$ (Cantor), conséquences : $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ (qui modélise l'univers d'un jeu de pile ou face infini) n'est pas dénombrable, il n'existe pas d'ensemble dont les éléments seraient tous les ensembles (Russell).

- Produit cartésien de deux ensembles dénombrables. S'il existe une injection $i : E \rightarrow \mathbb{N}$, alors E est fini ou dénombrable. S'il existe une surjection $s : \mathbb{N} \rightarrow E$, alors E est fini ou dénombrable. L'ensemble \mathbb{Q} est dénombrable. Réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables.

- Famille de réels positifs sommable, notation $\sum_{x \in X} a_x$. Le support d'une telle famille est fini ou dénombrable.

Famille de réels sommable, puis famille de complexes sommable. Propriétés admises : cohérence avec la théorie des séries ACV, linéarité de la somme, comparaison avec \leq , convergence commutative, sommation par paquets (valable sans condition pour les familles de réels positifs), théorème de Fubini (Idem).

- Tribu sur un ensemble non vide, espace mesurable. Propriété des tribus : stable par réunion finie, intersection finie ou dénombrable, par différence ensembliste. Mesure de probabilité sur un espace mesurable, espace probabilisé. Propriétés : $P(A^c)$, croissance et $P(B \setminus A)$ si $A \subset B$, $P(A \cup B)$. Vocabulaire : événement presque sûr, presque impossible, partie négligeable, tribu complète. Notion de propriété vraie presque sûrement : savoir expliquer ce que veut dire « $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est presque sûrement positive ou nulle ».

- Théorème de continuité croissante, de continuité décroissante. Conséquence : $P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{n=0}^N A_n\right)$ (idem avec \cap). Inégalité de Boole (sous-additivité).

- Distribution de probabilité $(p_x)_{x \in E}$ sur un ensemble fini ou dénombrable E . Il existe une unique mesure de probabilité sur $(E, \mathcal{P}(E))$ telle que $P(\{x\}) = p_x$ pour tout $x \in E$. Exemples fondamentaux : **loi uniforme** $\mathcal{U}(E)$ si E est fini, **loi binomiale** $\mathcal{B}(n, p)$ et interprétation, cas $n = 1$ (Bernoulli), **loi géométrique** $\mathcal{G}(p)$ et interprétation, **loi de Poisson** $\mathcal{P}(\lambda)$. Si $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$ est telle que $p_n \sim \frac{\lambda}{n}$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{B}(n, p_n)(\{k\}) = \mathcal{P}(\lambda)(\{k\})$ (convergence en loi de $\mathcal{B}(n, p_n)$ vers $\mathcal{P}(\lambda)$).

- Probabilité conditionnelle, notation $P_B(A)$ (ou $P(A | B)$ mais avoir compris qu'il n'y a pas d'événement « A sachant B »). L'application P_B est une mesure de probabilité. Événements indépendants, cas d'une famille quelconque. Si A et B sont indépendants, A^c et B aussi. Généralisation à une famille quelconque d'événements. Formule des probabilités composées : $P(A \cap B) = P_A(B)P(A) = P_B(A)P(B)$. Savoir placer les probabilités conditionnelles sur un arbre pondérés.

- Système complet dénombrable d'événements, ou quasi complet. Formule des probabilités totales (démontrée pour un système complet), et formule de Bayes.

3 Exercices de TD à savoir refaire

TD 11 : 2, 3, 4, 6, 8 (cours), 9, 10, 11. TD 12 : 1, 2, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13