Année 2025/26

Khôlle n° 19
semaine du 23 mars

démonstration de cours à savoir refaire :
— démonstrations exigibles pour tout le monde ;
— démonstrations exigibles pour les élèves avancés.
Ce qui n'est pas en couleur doit évidemment être connu (seule la démonstration n'est pas à apprendre).

1 Espaces probabilisés

Les exercices, mais toutes les définitions et tous les énoncés des théorèmes doivent être sus.

2 Séries entières

Abus de notation usuel : « série entière $\sum a_n z^n$ » en lieu et place de $\sum(z \mapsto a_n z^n)$.

• Lemme d'Abel. Le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est $\sup\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (a_n r^n) \text{ bornée}\}$ par définition. Caractérisation du rayon de CV : si $|z| < \mathrm{R}_a$, la série numérique $\sum a_n z^n$ CVA, si $|z| > \mathrm{R}_a$, la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement, et on ne peut rien dire si $|z| = \mathrm{R}_a$. Exemples à connaître : $\sum z^n$, $\sum \frac{z^n}{n!}$, $\sum n! z^n$.

• Le rayon de $\sum a_n z^n$ est le même que celui de $\sum a_n z^{n+1}$, de $\sum a_{n+1} z^{n+1}$, de $\sum \lambda a_n z^n$ (si $\lambda \neq 0$) ou encore de $\sum |a_n| z^n$. Cas particulier où (a_n) est presque nulle.

• « Décroissance » du rayon de convergence. Conséquences : si $a_n = \mathrm{O}(b_n)$ ou si $a_n = o(b_n)$, alors $\mathrm{R}_a \geqslant \mathrm{R}_b$. Cas particulier où (a_n) est bornée. Si $a_n \sim b_n$, alors $\mathrm{R}_a = \mathrm{R}_b$.

• Critère de D'Alembert adapté aux séries entières : si $z \in \mathbb{C}^*$, on pose $u_n = a_n z^n$, etc. Savoir trouver par cette méthode le rayon de convergence de $\sum \pi^n n^{2026} z^{2n}$.

• Rayon de convergence de la somme et du produit (de Cauchy) de deux séries entières. Savoir expliquer : si $\mathrm{R}_a \neq \mathrm{R}_a$, le rayon de la somme est $\min(\mathrm{R}_a, \mathrm{R}_b)$, mais cela n'est pas vrai pour le produit.

• Une série entière (réelle ou complexe) de rayon non nul converge normalement localement. Savoir expliquer pourquoi la CVN n'est pas globale en général. Continuité de la somme d'une série entière sur son disque/intervalle ouvert de convergence.

• Les séries entières $\sum a_n z^n$ er $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence. Conséquence : pour tout réel α, $\sum a_n z^n$ et $\sum n^\alpha a_n z^n$ ont même rayon. Cas des séries entières **réelles** : dérivée d'une fonction somme de série entière. Caractère $\mathscr{C}^\infty$ et expression de la dérivée k^{e} (attention aux séries lacunaires pour le 1^{er} terme de la somme !) Primitives de la somme d'une série entière réelle, application à $\ln(1+x)$ et $\operatorname{Arctan}(x)$.

• Fonctions $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ développables en série entière (ou analytique, ou de classe $\mathscr{C}^\omega$) en 0. Unicité du DSE_0 : la série entière ne peut être que $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$, et identification des coefficients (démonstration dans le cas réel, admis dans le cas complexe : cf. formule de Cauchy faite en fin de cours). DSE en 0 de $\frac{1}{1-z}$, e^z, $\ln(1+x)$, $\operatorname{Arctan}(x)$, $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\operatorname{ch}(x)$ et $\operatorname{sh}(x)$ **à connaître parfaitement**.

• Méthode de l'équation différentielle illustrée pour trouver le DSE_0 de $(1+x)^\alpha$ (où α est une constante complexe). Application au DSE_0 de Arcsin.

3 Exercices de TD à savoir refaire

$\boxed{\text{TD 12}}$: 1, 2, 4, 8, 12 (cf. DM n° 3), 13 (idem), 15, 19. Les 16 et 17 sont proches de l'exercice fait en fin de chapitre, 20, 23 (pour les plus avancés seulement).

$\boxed{\text{TD 13}}$: 1, 2 (on a corrigé la 1^{re} ligne seulement), 4 (fait en cours), 10 (Q1 faite en cours).