



démonstration de cours à savoir refaire :

- démonstrations exigibles pour tout le monde ;
- démonstrations exigibles pour les élèves avancés.

1 Espaces probabilisés

- Ensembles dénombrables : \mathbb{N}^* , \mathbb{Z} , \mathbb{N}^2 et \mathbb{Q} le sont, **mais pas \mathbb{R}** ni $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ni $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Les parties d'un ensemble dénombrables sont finies ou dénombrables. Produit cartésien (fini) d'ensembles dénombrables. Une réunion au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.

- Familles sommables : espace ℓ^1 , théorème de sommation par paquets, de Fubini (leur version positive ne demande aucune hypothèse), commutativité de la somme, linéarité.

- Tribu sur un ensemble non vide, espace mesurable, **stabilité par intersection au plus dénombrable, par \setminus et par Δ** . Mesure de probabilité sur un espace mesurable, espace probabilisé. **Propriétés : $P(A^c)$, croissance et $P(B \setminus A)$ si $A \subset B$, $P(A \cup B)$** . Savoir retrouver $P(A \cup B \cup C)$, la formule du crible a été donnée, mais est hors programme. Vocabulaire : événement presque sûr, presque impossible, partie négligeable. Notion de propriété vraie presque sûrement.

- **Théorème de continuité croissante**, de **continuité décroissante et conséquence sur les réunions et intersections partielles**. Inégalité de Boole (sous-additivité).

- Distribution de probabilité $(p_x)_{x \in E}$ sur un ensemble au plus dénombrable E . **Il existe une unique mesure de probabilité sur $(E, \mathcal{P}(E))$ telle que $\forall x \in E, P(\{x\}) = p_x$** . Exemples fondamentaux : **loi uniforme $\mathcal{U}(E)$** si E est fini, **loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$** et interprétation, cas $n = 1$ (Bernoulli), **loi géométrique $\mathcal{G}(p)$** et interprétation en termes de 1^{er} succès, **loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$** . **Si $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$ est telle que $p_n \sim \frac{\lambda}{n}$, alors pour tout entier $k, \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{B}(n, p_n)(\{k\}) = \mathcal{P}(\lambda)(\{k\})$** (convergence en loi de $\mathcal{B}(n, p_n)$ vers $\mathcal{P}(\lambda)$).

- Probabilité conditionnelle, notation $P_B(A)$ ou $P(A | B)$, mais avoir compris qu'il n'y a pas d'événement « A sachant B ». **L'application P_B est une mesure de probabilité**. Événements indépendants, cas d'une famille quelconque. **Si $A \perp B$, alors $A^c \perp B$** . Généralisation à une famille quelconque d'événements. Formule des probabilités composées : $P(A \cap B) = P_A(B)P(A) = P_B(A)P(B)$. Savoir placer les probabilités conditionnelles sur un arbre pondéré.

- Système complet dénombrable d'événements, ou quasi complet. Formule des probabilités totales (**démontrée pour un système complet**), et **formule de Bayes**.

2 Séries entières (cours uniquement, sans démonstration)

- Lemme d'Abel. Définition du rayon de convergence. Caractérisation du rayon de CV : comportement de la série numérique $\sum a_n z^n$ si $|z| < R_a$ ou si $|z| > R_a$. On ne peut rien dire si $|z| = R_a$. Exemples à connaître : $\sum z^n$, $\sum \frac{z^n}{n!}$, $\sum n! z^n$.

- Rayon de convergence de $\sum a_n z^{n+1}$, $\sum a_{n+1} z^n$, $\sum \lambda a_n z^n$ (si $\lambda \neq 0$), de $\sum |a_n| z^n$. Cas où (a_n) presque nulle. « Décroissance » du rayon de convergence, comportement vis à vis de O, o, \sim . Cas où (a_n) est bornée.

- Rayon de convergence d'une somme ou d'un produit de deux séries entières.

- Classe \mathcal{C}^∞ sur l'intervalle ouvert de convergence. Primitivation. Conséquence : développement en série entière de $\ln(1+x)$ et $\text{Arctan}(x)$ (à connaître!).

3 Exercices de TD à savoir refaire

TD 12 : 1, 2, 4, 8, 12 (cf. DM n° 3), 13 (idem), 15, 19. Les 16 et 17 sont proches de l'exercice fait en fin de chapitre.