Année 2024/25

Khôlle n° 18
semaine du 10 mars

En souligné : démonstration de cours à savoir refaire.

1 Suites et séries de fonctions

• Convergence simple dans $\mathscr{F}(\mathrm{X}, \mathbb{K})$. Propriétés conservées : positivité, croissance, décroissance (mais pas monotonie), caractère affine. Convergence uniforme : elle entraîne la CVS. Caractérisation par la norme $\|\cdot\|_\infty$. Notion de CVU locale (sur tout segment) si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

• Propriétés conservées par la CVU : le caractère borné, la continuité. Exemple de $(x \mapsto \frac{\sin(nx)}{1+n^2x^2})$, méthode « des crêtes » pour montrer une non CVU : si $f_n \xrightarrow{\text{CVU}} f$ alors pour toute suite (x_n), $f_n(x_n) - f(x_n) \to 0$.

• Adaptation aux séries numériques. Notion de convergence normale (et sa version locale). La CVN entraîne la CVU.

• Théorème de la double limite (admis). Théorème d'interversion $\lim\limits_{n\to\infty}$ et $\int_{[a,b]}$ en cas de CVU. Savoir donner un contre-exemple s'il n'y a pas CVU, savoir donner un contre-exemple pour des intégrales sur $[0, +\infty[$.

• Classe $\mathscr{C}^1$ d'une limite simple d'une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Généralisation à la classe $\mathscr{C}^k$. Adaptation des résultats précédents aux séries de fonctions.

• Existence d'une fonction dérivable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f' = f'$ et $f(0) = 1$ (l'unicité a été démontrée au chap. 1) : donc, par définition, $\exp(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Si l'on définit e^z comme étant $\mathrm{e}^{\mathfrak{Re}(z)}(\cos(\mathfrak{Im}(z)) + \mathrm{i}\sin(\mathfrak{Im}(z)))$, alors cette égalité reste vraie dans $\mathbb{C}$.

• Étude de la fonction ζ d'Euler-Riemann : décroissance, limite et équivalent en 1^+, limite $+\infty$, équivalent de $\zeta - 1$ en $+\infty$, classe $\mathscr{C}^\infty$.

2 Ensembles dénombrables et familles sommables

• Rappels sur les ensembles finis.

• Ensembles dénombrables, $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}^2$ sont dénombrables, mais $\mathbb{R}$ ne l'est pas. Les parties de $\mathbb{N}$ sont finies ou dénombrables. Il n'existe aucune surjection de E sur $\mathscr{P}(\mathrm{E})$ (Cantor), conséquences : $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ (qui modélise l'univers d'un jeu de pile ou face infini) n'est pas dénombrable, il n'existe pas d'ensemble dont les éléments seraient tous les ensembles (Russell).

• Produit cartésien de deux ensembles dénombrables. S'il existe une injection $i : \mathrm{E} \to \mathbb{N}$, alors E est fini ou dénombrable. S'il existe une surjection $s : \mathbb{N} \to \mathrm{E}$, alors E est fini ou dénombrable. L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dénombrable. Réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables.

• Famille de réels positifs sommable, notation $\sum\limits_{x\in\mathrm{X}} a_x$. Le support d'une telle famille est fini ou dénombrable. Famille de réels sommable, puis famille de complexes sommable. Propriétés admises : cohérence avec la théorie des séries ACV, linéarité de la somme, comparaison avec $\leqslant$, convergence commutative, sommation par paquets (valable sans condition pour les familles de réels positifs), théorème de Fubini (Idem).

3 Exercices de TD à savoir refaire

$\boxed{\text{TD 11}}$ 1, 4, 5, 7, 8, 9, 15. $\boxed{\text{TD 12}}$: 2, 3, 4, 5, 7.