



démonstration de cours à savoir refaire :

- démonstrations exigibles pour tout le monde ;
- démonstrations exigibles pour les élèves avancés.

1 Suites et séries de fonctions

- Savoir donner les définitions de la CVS, la CVU, la CVN et leurs versions locales. La CVU se traduit par la norme $\|\cdot\|_\infty$ et implique la CVS.

- La CVS ne conserve pas la continuité, ni le caractère bornée. La CVU ne conserve pas la classe $\mathcal{C}^1$. Méthode « des crêtes » pour montrer une non CVU.

- Adaptation aux séries numériques, $\sum f_n$ CVU ssi $(R_n) \xrightarrow{CVU} 0$. Notion de convergence normale (et sa version locale). Exemple de $\sum (x \mapsto x^n)$ sur $] -1, 1[$. La CVN entraîne la CVU.

- Théorème d'interversion $\lim_{n \rightarrow \infty}$ et $\int_{[a,b]}$ en cas de CVU. Savoir donner un contre-exemple s'il n'y a pas CVU, savoir donner un contre-exemple pour des intégrales sur $[0, +\infty[$.

- Classe $\mathcal{C}^1$ d'une limite simple d'une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Généralisation à la classe $\mathcal{C}^k$. Adaptation des résultats précédents aux séries de fonctions.

- Existence d'une fonction dérivable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f' = f'$ et $f(0) = 1$ (l'unicité a été démontrée au chap. 1).

- Étude de la fonction ζ d'Euler-Riemann : décroissance, convexité, limite et équivalent en 1^+ , limite $+\infty$, équivalent de $\zeta - 1$ en $+\infty$, classe $\mathcal{C}^\infty$.

2 Ensembles dénombrables (cours seulement)

- Rappels sur les ensembles finis : savoir donner tous les cardinaux du cours.

- Ensembles dénombrables, $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}^2$ sont dénombrables, mais $\mathbb{R}$ ne l'est pas. Les parties de $\mathbb{N}$ sont finies ou dénombrables. Il n'existe aucune surjection de E sur $\mathcal{P}(E)$ (Cantor), conséquences : $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ (qui modélise l'univers d'un jeu de pile ou face infini) n'est pas dénombrable, il n'existe pas d'ensemble dont les éléments seraient tous les ensembles (Russell).

- Produit cartésien de deux ensembles dénombrables. S'il existe une injection $i : E \rightarrow \mathbb{N}$, alors E est fini ou dénombrable. S'il existe une surjection $s : \mathbb{N} \rightarrow E$, alors E est fini ou dénombrable. L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dénombrable. Réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables.

- Famille de réels positifs sommable, notation $\sum_{x \in X} a_x$. Le support d'une telle famille est fini ou dénombrable. Famille de réels sommable, puis famille de complexes sommable, espace $\ell^1(X)$. Propriétés admises : cohérence avec la théorie des séries ACV, linéarité de la somme, comparaison avec $\leq$, convergence commutative, sommation par paquets (valable sans condition pour les familles de réels positifs), théorème de Fubini (Idem).

- Tribu sur un ensemble non vide, espace mesurable. Propriétés. Mesure de probabilité sur un espace mesurable, espace probabilisé. Propriétés : $P(A^c)$, croissance et $P(B \setminus A)$ si $A \subset B$, $P(A \cup B)$. Vocabulaire : événement presque sûr, presque impossible, partie négligeable. Notion de propriété vraie presque sûrement.

- Théorème de continuité croissante, de continuité décroissante et conséquence sur les réunions et intersections partielles. Inégalité de Boole (sous-additivité).

3 Exercices de TD à savoir refaire

TD 11 : 1, 2, 4, 5, 7, 8, 16. TD 12 : 1, 2.