Année 2024/25

Khôlle n° 17
semaine du 3 mars

En souligné : démonstration de cours à savoir refaire.

1 Suites et séries de fonctions

• Convergence simple dans $\mathscr{F}(\mathrm{X}, \mathbb{K})$. Propriétés conservées : positivité, croissance, décroissance (mais pas monotonie), caractère affine. Exemples montrant que la continuité n'est pas conservée, ni le caractère borné.

• Convergence uniforme : elle entraîne la CVS. Caractérisation par la norme $\|\cdot\|_\infty$. Notion de CVU locale sur tout segment si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Exemple montrant que la classe $\mathscr{C}^1$ n'est pas conservée.

• Propriétés conservées par la CVU : le caractère borné, la continuité. Exemple de $(x \mapsto \frac{\sin(nx)}{1+n^2x^2})$, méthode « des crêtes » pour montrer une non CVU : si $f_n \xrightarrow{\text{CVU}} f$ alors pour toute suite (x_n), $f_n(x_n) - f(x_n) \to 0$.

• Adaptation aux séries numériques, $\sum f_n$ CVU ssi $(\mathrm{R}_n) \xrightarrow{\text{CVU}} 0$. Notion de convergence normale (et sa version locale). Exemple de $\sum(x \mapsto x^n)$ sur $]-1, 1[$. La CVN entraîne la CVU.

• Théorème d'interversion $\lim\limits_{n\to\infty}$ et $\int_{[a,b]}$ en cas de CVU. Savoir donner un contre-exemple s'il n'y a pas CVU, savoir donner un contre-exemple pour des intégrales sur $[0, +\infty[$.

• Classe $\mathscr{C}^1$ d'une limite simple d'une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Généralisation à la classe $\mathscr{C}^k$. Adaptation des résultats précédents aux séries de fonctions.

• Existence d'une fonction dérivable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f' = f'$ et $f(0) = 1$ (l'unicité a été démontrée au chap. 1) : donc, par définition, $\exp(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Si on définit e^z comme étant $\mathrm{e}^{\mathfrak{Re}(z)}(\cos(\mathfrak{Im}(z)) + \mathrm{i}\sin(\mathfrak{Im}(z)))$, alors cette égalité reste vraie dans $\mathbb{C}$.

• Étude de la fonction ζ d'Euler-Riemann : décroissance, limite et équivalent en 1^+, limite $+\infty$, équivalent de $\zeta - 1$ en $+\infty$, classe $\mathscr{C}^\infty$.

2 Ensembles dénombrables (cours seulement

• Rappels sur les ensembles finis, définition du cardinal, cardinal d'une partie, d'une réunion, d'un produit cartésien, de l'ensemble des parties, de l'ensemble des parties de cardinal k, de l'ensembles des applications, de l'ensemble des injections, de l'ensemble des permutations. Cardinal et injections/surjections.

• Ensembles dénombrables. Les ensembles $\mathbb{N}^*, \mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}^2$ sont dénombrables, mais $\mathbb{R}$ ne l'est pas.

3 Exercices de TD à savoir refaire

$\boxed{\text{TD 11}}$ 1, 4, 5, 7, 8, 9, 15.