Année 2023/24

Khôlle n° 17
semaine du 26 février

En souligné : démonstration de cours à savoir refaire.

1 Suites et séries de fonctions

• Convergence simple dans $\mathscr{F}(\mathrm{X}, \mathbb{K})$. Propriétés conservées : positivité, croissance, convexité, caractère affine. Exemples montrant que la continuité n'est pas conservée, ni le caractère borné.

• Convergence uniforme : elle entraîne la CVS. Caractérisation par la norme $\|\cdot\|_\infty$. Notion de CVU locale (sur tout segment si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou sur tout disque si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Exemple montrant que la classe $\mathscr{C}^1$ n'est pas conservée.

• Propriétés conservées par la CVU : le caractère borné (et dans ce cas $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\|_\infty = \|f\|_\infty$), la continuité. Exemple de $(x \mapsto \frac{\sin(nx)}{1+n^2x^2})$, méthode « des crêtes » pour montrer une non CVU : si $f_n \overset{\text{CVU}}{\longrightarrow} f$ alors pour toute suite (x_n), $f_n(x_n) - f(x_n) \to 0$.

• Adaptation aux séries numériques, $\sum f_n$ CVU ssi (R_n) CVU vers 0. Notion de convergence normale (et sa version locale). Exemple de $\sum(x \mapsto \frac{1}{n!}x^n)$ sur $\mathbb{R}$. La CVN entraîne la CVU et $\left\|\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n\right\|_\infty \leqslant \sum\limits_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_\infty$.

• Interversion $\lim\limits_{n\to\infty}$ et $\int_{[a,b]}$ en cas de CVU. Savoir donner un contre-exemple s'il n'y a pas CVU, savoir donner un contre-exemple pour des intégrales sur $[0, +\infty[$.

• Classe $\mathscr{C}^1$ d'une limite simple d'une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Généralisation à la classe $\mathscr{C}^k$. Adaptation des résultats précédents aux séries de fonctions.

• Étude de la fonction ζ d'Euler-Riemann : décroissance, convexité, limite en 1^+ (on a même donné un équivalent) et $+\infty$, classe $\mathscr{C}^\infty$.

2 Espaces probabilisés (cours uniquement)

• Rappels sur les ensembles finis : définition et propriété fondamentale des cardinaux, cardinal d'une partie, d'une réunion, de l'ensemble des parties, de l'ensemble des parties ayant k éléments, d'un produit cartésien, de l'ensemble des applications, de l'ensemble des permutations, de l'ensemble des injections.

• Ensembles dénombrables, $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}^2$ sont dénombrables, mais $\mathbb{R}$ ne l'est pas. Les parties de $\mathbb{N}$ sont finies ou dénombrables. Il n'existe aucune surjection de E sur $\mathscr{P}(\mathrm{E})$ (Cantor), conséquences : $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (qui modélise l'univers d'un jeu de pile ou face infini) n'est pas dénombrable, il n'existe pas d'ensemble dont les éléments seraient tous les ensembles (Russell).

• Produit cartésien de deux ensembles dénombrables. S'il existe une injection $i : \mathrm{E} \to \mathbb{N}$, alors E est fini ou dénombrable. S'il existe une surjection $s : \mathbb{N} \to \mathrm{E}$, alors E est fini ou dénombrable. L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dénombrable. Réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables.

• Famille de réels positifs sommable, notation $\sum\limits_{x\in\mathrm{X}} a_x$. Le support d'une telle famille est fini ou dénombrable. Famille de réels sommable, puis famille de complexes sommable. Propriétés admises : cohérence avec la théorie des séries ACV, linéarité de la somme, comparaison avec $\leqslant$, convergence commutative, sommation par paquets (valable sans condition pour les familles de réels positifs), théorème de Fubini.

3 Exercices de TD à savoir refaire

$\boxed{\text{TD 11}}$: 2, 3, 4, 6, 8 (cours), 9, 10.