Année 2023/24

Khôlle n° 16
semaine du 5 février

En souligné : démonstration de cours à savoir refaire.

1 Réduction (partie 2)

• Des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes d'une matrice symétrique réelle sont orthogonaux. Toute matrice symétrique réelle possède au moins une valeur propre réelle. Théorème spectral : toute matrice symétrique réelle est orthodiagonalisable. Si $\mathrm{P} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, dire $\mathrm{P}^\intercal \cdot \mathrm{P} = \mathrm{I}_n$ c'est dire que les colonnes de P forment une BON de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Si $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telle que $\mathrm{S} = \mathrm{PDP}^\intercal$.

• Matrices symétriques positives, définies positives. Notation $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Caractérisation spectrale. Retour au Calcul différentiel. CN_2 : si f admet un minimum en $a \in \mathrm{U}$, alors $\mathrm{H}_f(a) \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. CS_2 : si $a \in \mathrm{U}$ est un point critique et si $\mathrm{H}_f(a) \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors f admet un minimum strict en a. Cas particulier des fonctions de deux variables avec les notations de Monge r, s, t et la condition $rt - s^2 \neq 0$.

• Si $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$, alors $\mathrm{P}(\lambda) \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(\mathrm{P}(u))$. Conséquence, si P est annulateur de u, alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u) \subset \mathrm{Rac}_{\mathbb{K}}(\mathrm{P})$.

• Lemme faible des noyaux : si $\mathrm{P} = (\mathrm{X} - a)(\mathrm{X} - b)$ avec $a \neq b$, alors pour tout endomorphisme u, $\mathrm{KerP}(u) = \mathrm{Ker}(u - a\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(u - b\mathrm{Id})$. Généralisation à $\prod_{k=1}^{r} (\mathrm{X} - a_k)$ puis à $\prod_{k=1}^{r} (\mathrm{X} - a_k)^{m_k}$ (admis).

• Théorème important : u est diagonalisable ssi u possède un polynôme annulateur scindé à racines simples. Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit.

• Endomorphismes/matrices carrées trigonalisables. Caractérisation *via* le polynôme caractéristique. Trigonalisation des matrices $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $\sum_{\lambda} \dim \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{M}) = n - 1$. Trigonalisation des matrices 3×3 n'ayant qu'une valeur propre λ telle que $\dim \mathrm{E}_\lambda = 1$ par la méthode des noyaux itérés (réduite de Jordan).

• Application à la densité de $\mathscr{D}_n(\mathbb{C})$ et démonstration du théorème de Cayley-Hamilton.

• Application à la résolution des EDL_k homogènes à coefficients constants : Détermination de $\mathrm{Ker}(\mathrm{D} - \mathrm{Id})^m$ (où D est la dérivation et $(\lambda, m) \in \mathbb{K} \times \mathbb{N}^*$), puis résolution dans le cas où le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$.

2 Suites et séries de fonctions

• Convergence simple dans $\mathscr{F}(\mathrm{X}, \mathbb{K})$. Propriétés conservées : positivité, croissance, convexité, caractère affine. Exemples montrant que la continuité n'est pas conservée, ni le caractère borné.

• Convergence uniforme : elle entraîne la CVS. Caractérisation par la norme $\|\cdot\|_\infty$. Notion de CVU locale (sur tout segment si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou sur tout disque si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Exemple montrant que la classe $\mathscr{C}^1$ n'est pas conservée.

• Propriétés conservées par la CVU : le caractère borné (et dans ce cas $\lim_{n \to \infty} \|f_n\|_\infty = \|f\|_\infty$), la continuité. Exemple de $(x \mapsto \frac{\sin(nx)}{1+n^2x^2})$, méthode « des crêtes » pour montrer une non CVU : si $f_n \xrightarrow{\mathrm{CVU}} f$ alors pour toute suite (x_n), $f_n(x_n) - f(x_n) \to 0$.

• Adaptation aux séries numériques, $\sum f_n$ CVU ssi (R_n) CVU vers 0. Notion de convergence normale (et sa version locale). Exemple de $\sum (x \mapsto \frac{1}{n!} x^n)$ sur $\mathbb{R}$. La CVN entraîne la CVU et $\left\| \sum_{n=0}^{\infty} f_n \right\|_\infty \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_\infty$.

• Interversion $\lim_{n \to \infty}$ et $\int_{[a,b]}$ en cas de CVU. Savoir donner un contre-exemple s'il n'y a pas CVU, savoir donner un contre-exemple pour des intégrales sur $[0, +\infty[$.

• Classe $\mathscr{C}^1$ d'une limite simple d'une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Généralisation à la classe $\mathscr{C}^k$. Adaptation des résultats précédents aux séries de fonctions.

3 Exercices de TD à savoir refaire

$\boxed{\text{TD 10}}$: 1 (fait en cours), 2, 6, 7, 12, 13, 20. $\boxed{\text{TD 11}}$: 2, 3, 9.