Année 2024/25

Khôlle n° 16

semaine du 10 février

1 Réduction : partie 2

• Des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes d'une matrice symétrique réelle sont orthogonaux. Toute matrice symétrique réelle possède au moins une valeur propre réelle. Théorème spectral : toute matrice symétrique réelle est orthodiagonalisable, c'est-à-dire si $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telle que $\mathrm{S} = \mathrm{PDP}^\intercal$.

• Si $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, l'application $q_\mathrm{S} : \mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}^\intercal \mathrm{SX} = \langle \mathrm{SX}, \mathrm{X} \rangle$ est polynomiale de degré 2 : c'est la forme quadratique associée à S : expression à savoir expliquer $\sum\limits_{i,j} s_{i,j} x_i x_j$. Matrices symétriques positives, définies positives. Notation $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Caractérisation spectrale. Application au Calcul différentiel : (CN_2) si f admet un minimum local en $a \in \mathrm{U}$, alors $\mathrm{H}_f(a) \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$; (CS_2) si $a \in \mathrm{U}$ est un point critique et si $\mathrm{H}_f(a) \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors f admet un minimum local strict en a. Cas particulier des fonctions de deux variables avec les notations de Monge r, s, t et la condition $rt - s^2 \neq 0$.

• Si $\lambda \in \mathrm{Sp}_\mathbb{K}(u)$, alors $\mathrm{P}(\lambda) \in \mathrm{Sp}_\mathbb{K}(\mathrm{P}(u))$. Conséquence, si P est annulateur de u, alors $\mathrm{Sp}_\mathbb{K}(u) \subset \mathrm{Rac}_\mathbb{K}(\mathrm{P})$; on retrouve le cas des projections et des symétries.

• Lemme des noyaux, version simple : si $\mathrm{P} = \prod\limits_{i=1}^{d} (\mathrm{X} - \alpha_i)$ est SARS, alors pour tout endomorphisme u, $\operatorname{Ker} \mathrm{P}(u) = \bigoplus\limits_{i=1}^{d} \operatorname{Ker}(u - \alpha_i \mathrm{Id})$ (démo. vue avec les polynômes de Lagrange). Lemme des noyaux (cas général) si $\mathrm{P} = \prod\limits_{i=1}^{d} (\mathrm{X} - \alpha_i)^{m_i}$ (admis).

• Théorème important : u est diagonalisable ssi u possède un polynôme annulateur SARS. Conséquence : diagonalisabilité d'un endomorphisme induit par un sev stable.

• Endomorphismes/matrices carrées trigonalisables. CNS de trigonalisabilité par le polynôme caractéristique. Trigonalisation des matrices $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $\sum\limits_{\lambda} \dim \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{M}) = n - 1$. Cas des matrices 3×3 ayant une valeur propre triple telle que $\dim \mathrm{E}_\lambda = 1$ par la méthode des noyaux itérés (réduite de Jordan).

• Applications − Une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton : on montre avant que l'ensemble des matrices diagonalisables sur $\mathbb{C}$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Résolution des EDL_k homogènes à coefficients constants : on détermine avant $\operatorname{Ker}(\mathrm{D} - \lambda \mathrm{Id})^m$ où D est la dérivation.

2 Exercices de TD à savoir refaire

$\boxed{\text{TD 10}}$ 2 , 5, 12, 13, 20.