Année 2024/25

Khôlle n° 15
semaine du 3 février

1 Intégrales généralisées

• Intégrales absolument convergentes : elles convergent. Intégrale semi-convergente, exemple de référence : intétgrale de Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$: le fait qu'elle vaille $\frac{\pi}{2}$ a été démontré en TD (exo. 16). Fonctions intégrables. Adaptation des règles de comparaison aux fonctions intégrables.

• Espaces de Lebesgue $\mathbb{L}^1_{\text{cpm}}(\mathrm{I},\mathbb{K})$ et $\mathbb{L}^2_{\text{cpm}}(\mathrm{I},\mathbb{K})$. L'ensemble $\mathbb{L}^1$ est un sev de $\mathscr{C}^{\text{cpm}}(\mathrm{I},\mathbb{K})$, $\|\cdot\|_1$ est une semi-norme, et c'est une norme sur $\mathbb{L}^1_{\mathrm{c}}(\mathrm{I},\mathbb{K})$. Lemme « $\mathbb{L}^2\mathbb{L}^2 \subset \mathbb{L}^1$ ». L'ensemble $\mathbb{L}^2$ est un sev de $\mathscr{C}^{\text{pm}}(\mathrm{I},\mathbb{K})$, inégalité de Cauchy Schwarz, $\|\cdot\|_2$ est une semi-norme, et c'est une norme sur $\mathbb{L}^2_{\mathrm{c}}$.

2 Réduction : partie 2

• Des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes d'une matrice symétrique réelle sont orthogonaux. Toute matrice symétrique réelle possède au moins une valeur propre réelle. Théorème spectral : toute matrice symétrique réelle est orthodiagonalisable, c'est-à-dire si $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telle que $\mathrm{S} = \mathrm{PDP}^\intercal$.

• Si $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, l'application $q_\mathrm{S} : \mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}^\intercal\mathrm{SX} = \langle \mathrm{SX},\mathrm{X}\rangle$ est polynomiale de degré 2 : c'est la forme quadratique associée à S : expression à savoir expliquer $\sum_{i,j} s_{i,j}x_ix_j$. Matrices symétriques positives, définies positives. Notation $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Caractérisation spectrale. Application au Calcul différentiel : (CN$_2$) si f admet un minimum local en $a \in \mathrm{U}$, alors $\mathrm{H}_f(a) \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$; (CS$_2$) si $a \in \mathrm{U}$ est un point critique et si $\mathrm{H}_f(a) \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors f admet un minimum local strict en a. Cas particulier des fonctions de deux variables avec les notations de Monge r, s, t et la condition $rt - s^2 \neq 0$.

• Si $\lambda \in \mathrm{Sp}_\mathbb{K}(u)$, alors $\mathrm{P}(\lambda) \in \mathrm{Sp}_\mathbb{K}(\mathrm{P}(u))$. Conséquence, si P est annulateur de u, alors $\mathrm{Sp}_\mathbb{K}(u) \subset \mathrm{Rac}_\mathbb{K}(\mathrm{P})$; on retrouve le cas des projections et des symétries.

• Lemme des noyaux, version simple : si $\mathrm{P} = \prod_{i=1}^{d}(\mathrm{X}-\alpha_i)$ est SARS, alors pour tout endomorphisme u, $\operatorname{Ker}\mathrm{P}(u) = \bigoplus_{i=1}^{d} \operatorname{Ker}(u - \alpha_i\mathrm{Id})$ (démo. vue avec les polynômes de Lagrange). Lemme des noyaux (cas général) si $\mathrm{P} = \prod_{i=1}^{d}(\mathrm{X}-\alpha_i)^{m_i}$ (admis).

• Théorème important : u est diagonalisable ssi u possède un polynôme annulateur SARS. Conséquence : diagonalisabilité d'un endomorphisme induit par un sev stable.

• Endomorphismes/matrices carrées trigonalisables. CNS de trigonalisabilité par le polynôme caractéristique. Trigonalisation des matrices $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $\sum_\lambda \dim \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{M}) = n-1$. Cas des matrices 3×3 ayant une valeur propre triple telle que $\dim \mathrm{E}_\lambda = 1$ par la méthode des noyaux itérés (réduite de Jordan).

3 Exercices de TD à savoir refaire

TD 9 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8 (vu en cours), 10, 11. TD 10 2 (question 1), 5, 13.