



démonstration de cours à savoir refaire :

- démonstrations exigibles pour tout le monde ;
- démonstrations exigibles pour les élèves avancés.

1 Intégrales généralisées à un intervalle quelconque

- Sommes de Riemann (sur une subdivision pointée (σ, ξ)), cas des subdivisions régulières, théorème des sommes de Riemann pour les subdivisions régulières, **démonstration dans le cas $\mathcal{C}^1$** .

- Étude de la fonction de Newton $N_a : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$. **Croissance si f est positive. Continuité si f est cpm. Classe $\mathcal{C}^1$ si f est continue (TFA)**. Existence de primitives pour les fonctions continues sur un intervalle, formule $\int_a^b f = F(b) - F(a)$. Intégration par parties, changement de variable (cas où f est continue, puis cas admis où f est cpm avec une hypothèse supplémentaire sur le changement de variable).

- Intégrales généralisées sur $[a, b[$. **Exemples de référence** : $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx$, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$, $\int_0^1 \ln(x) dx$. Savoir expliciter une fonction continue positive d'intégrale convergente sur $[0, +\infty[$ mais qui ne tend pas vers 0 en $+\infty$.

- Intégrales généralisées sur $]a, b[$. **Exemples de référence** : $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$, $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

- Intégrales faussement généralisées (présence d'un prolongement par continuité) : elles convergent.

- Relations de comparaison $\leq, o, O, \sim$ concernant les IFP (intégrales de fonctions positives). Intégration par parties (on revient sur un segment) et changement de variables (hypothèse de stricte monotonie) pour les intégrales généralisées.

- Intégrales absolument convergentes : **elles convergent**. Intégrale semi-convergente, **exemple de référence : intégrale de Dirichlet** $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$. Fonctions intégrables. Adaptation des règles de comparaison aux fonctions intégrables.

- Espaces de Lebesgue $\mathbb{L}_{\text{cpm}}^1(I, \mathbb{K})$ et $\mathbb{L}_{\text{cpm}}^2(I, \mathbb{K})$. L'ensemble $\mathbb{L}^1$ est un sev de $\mathcal{C}^{\text{cpm}}(I, \mathbb{K})$, $\|\cdot\|_1$ est une norme sur $\mathbb{L}_{\text{c}}^1(I, \mathbb{K})$. **Lemme « $\mathbb{L}^2 \mathbb{L}^2 \subset \mathbb{L}^1$ »**. **L'ensemble $\mathbb{L}^2$ est un sev de $\mathcal{C}^{\text{pm}}(I, \mathbb{K})$** , inégalité de Cauchy Schwarz, $\|\cdot\|_2$ est une norme sur $\mathbb{L}_{\text{c}}^2$.

2 Réduction, partie 2 (cours uniquement)

- **Orthogonalité des vecteurs propres d'une matrice symétrique réelle**. Si S est une matrice symétrique réelle, alors **$\text{Sp}_{\mathbb{C}}(S) = \text{Sp}_{\mathbb{R}}(S)$** . Théorème spectral matriciel, notion de matrice orthodagonalisable. Savoir donner une matrice symétrique complexe non diagonalisable.

- Matrices symétriques (définies) positives ($X^t S X \geq 0$), notation $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Caractérisation spectrale. Application à l'étude des points critiques : savoir énoncer CN_2 et CS_2 concernant la hessienne.

- **Si λ est une valeur propre de u , alors pour tout polynôme P , $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(u)$** . En conséquence : $\text{Sp}(u) \subset \text{Rac}_{\mathbb{K}}(P)$ si P est annulateur de u .

- Savoir énoncer le lemme des noyaux (version simple) et son principal théorème d'application : une CNS de diagonalisabilité.

3 Exercices de TD à savoir refaire

TD 9 : 1, 2, 4, 5, 6, 11. L'exercice 15 sera corrigé lundi.