Année 2023/24

Khôlle n° 15
semaine du 29 janvier

En souligné : démonstration de cours à savoir refaire.

1 Intégrales généralisées à un intervalle quelconque

• Espaces de Lebesgue $\mathbb{L}^1_{\mathrm{cpm}}(\mathrm{I},\mathbb{K})$ et $\mathbb{L}^2_{\mathrm{cpm}}(\mathrm{I},\mathbb{K})$. L'ensemble $\mathbb{L}^1$ est un sev de $\mathscr{C}^{\mathrm{cpm}}(\mathrm{I},\mathbb{K})$, $\|\cdot\|_1$ est une semi-norme, et c'est une norme sur $\mathbb{L}^1_{\mathrm{c}}(\mathrm{I},\mathbb{K})$. Lemme « $\mathbb{L}^2\mathbb{L}^2 \subset \mathbb{L}^1$ ». L'ensemble $\mathbb{L}^2$ est un sev de $\mathscr{C}^{\mathrm{pm}}(\mathrm{I},\mathbb{K})$, inégalité de Cauchy Schwarz, $\|\cdot\|_2$ est une semi-norme, et c'est une norme sur $\mathbb{L}^2_{\mathrm{c}}$.

2 Réduction (partie 2)

• Des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes d'une matrice symétrique réelle sont orthogonaux. Toute matrice symétrique réelle possède au moins une valeur propre réelle. Théorème spectral : toute matrice symétrique réelle est orthodiagonalisable. Si $\mathrm{P} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dire $\mathrm{P}^\intercal \cdot \mathrm{P} = \mathrm{I}_n$ c'est dire que les colonnes de P forment une BON de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Si $\mathrm{S} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telle que $\mathrm{S} = \mathrm{PDP}^\intercal$.

• Matrices symétriques positives, définies positives. Notation $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Caractérisation spectrale. Retour au Calcul différentiel. CN_2 : si f admet un minimum en $a \in \mathrm{U}$, alors $\mathrm{H}_f(a) \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. CS_2 : si $a \in \mathrm{U}$ est un point critique et si $\mathrm{H}_f(a) \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors f admet un minimum strict en a. Cas particulier des fonctions de deux variables avec les notations de Monge r, s, t et la condition $rt - s^2 \neq 0$.

• Si $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$, alors $\mathrm{P}(\lambda) \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(\mathrm{P}(u))$. Conséquence, si P est annulateur de u, alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u) \subset \mathrm{Rac}_{\mathbb{K}}(\mathrm{P})$.

• Lemme faible des noyaux : si $\mathrm{P} = (\mathrm{X}-a)(\mathrm{X}-b)$ avec $a \neq b$, alors pour tout endomorphisme u, $\mathrm{KerP}(u) = \mathrm{Ker}(u - a\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(u - b\mathrm{Id})$. Généralisation à $\prod_{k=1}^{r}(\mathrm{X}-a_k)$ (à racines simples) et à $\prod_{k=1}^{r}(\mathrm{X}-a_k)^{m_k}$ (admis).

• Théorème important : u est diagonalisable ssi u possède un polynôme annulateur scindé à racines simples. Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit.

• Endomorphismes/matrices carrées trigonalisables. Caractérisation *via* le polynôme caractéristique. Trigonalisation des matrices $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $\sum_{\lambda} \dim \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{M}) = n-1$. Trigonalisation des matrices 3×3 n'ayant qu'une valeur propre λ telle que $\dim \mathrm{E}_\lambda = 1$ par la méthode des noyaux itérés (réduite de Jordan).

• Application à la densité de $\mathscr{D}_n(\mathbb{C})$ et démonstration du théorème de Cayley-Hamilton.

• Application à la résolution des EDL_k homogènes à coefficients constants.

3 Exercices de TD à savoir refaire

$\boxed{\text{TD 9}}$: 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, $\boxed{\text{TD 10}}$: 2, 6, 7, 12 (seulement étude du signe).