



## 1 Limites et continuité dans les EVN

• Si  $f : E \rightarrow F$  est continue, et si  $U$  est un ouvert de  $F$  et  $A$  un fermé de  $F$ , alors  $f^{-1}\langle U \rangle$  est un ouvert de  $E$  et  $f^{-1}\langle A \rangle$  est un fermé de  $E$ .

• Continuité des applications linéaires : 5 assertions équivalentes. La meilleure constante de Lipschitz est  $\sup_{x \neq 0_E} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$ , on la note  $\|f\|$ . Si  $E$  est de dimension finie,  $\mathcal{L}_c(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$ . Exemple vu en cours à savoir refaire :  $f \mapsto f(0)$  est continue si  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  est muni de  $\|\cdot\|_\infty$  mais non continue s'il est muni de  $\|\cdot\|_1$ .

## 2 Intégrales généralisées à un intervalle quelconque

• Fonctions continues sur un segment, sur un intervalle quelconque. Savoir donner deux fonctions continues par morceaux dont la composée ne l'est pas. Fonctions en escalier, proto-intégrales de ces fonctions notée  $\hat{\int}_{[a,b]}$ .

• Construction de l'intégrale au sens de Riemann : savoir expliquer les étapes. Les fonctions continues par morceaux sur un segment admettent une intégrale au sens de Riemann mais pas l'indicatrice de  $\mathbb{Q}$  sur  $[0, 1]$ . Propriétés de l'intégrale. Théorème de la valeur moyenne.

• Sommes de Riemann (sur une subdivision pointée  $(\sigma, \xi)$ ), cas des subdivisions régulières, théorème des sommes de Riemann pour les subdivisions régulières, démonstration dans le cas  $\mathcal{C}^1$ .

• Étude de la fonction de Newton  $N_a : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ . Croissance si  $f$  est positive. Continuité si  $f$  est cpm. Classe  $\mathcal{C}^1$  si  $f$  est continue (TFA). Existence de primitives pour les fonctions continues sur un intervalle, formule  $\int_a^b f = F(b) - F(a)$ . Intégration par parties, changement de variable (cas où  $f$  est continue, puis cas admis où  $f$  est cpm avec une hypothèse supplémentaire sur le changement de variable).

• Intégrales généralisées sur  $[a, b[$ . Exemples de référence :  $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx$ ,  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ ,  $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ ,  $\int_0^1 \ln(x) dx$ . Exemple de fonction continue positive d'intégrale convergente sur  $[0, +\infty[$  mais qui ne tend pas vers 0 en  $+\infty$ .

• Intégrales généralisées sur  $]a, b[$ . Exemples de référence :  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ ,  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ .

• Intégrales faussement généralisées (présence d'un prolongement par continuité) : savoir expliquer pourquoi elles convergent. Exemples à connaître :  $\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{x} dx$  et  $\int_0^1 x \ln(x) dx$  (savoir calculer sa valeur).

• Relations de comparaison  $\leq, o, O, \sim$  concernant les IFP (intégrales de fonctions positives).

• Intégration par parties et changement de variables adaptés aux intégrales généralisées.

• Intégrales absolument convergentes : elles convergent. Intégrale semi-convergente, exemple de référence : intégrale de Dirichlet  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$ . Fonctions intégrables. Adaptation des règles de comparaison aux fonctions intégrables.

• Espaces de Lebesgue  $\mathbb{L}_{\text{cpm}}^1(I, \mathbb{K})$  et  $\mathbb{L}_{\text{cpm}}^2(I, \mathbb{K})$ . L'ensemble  $\mathbb{L}^1$  est un sev de  $\mathcal{C}^{\text{cpm}}(I, \mathbb{K})$ ,  $\|\cdot\|_1$  est une norme sur  $\mathbb{L}_c^1(I, \mathbb{K})$ . Lemme «  $\mathbb{L}^2 \mathbb{L}^2 \subset \mathbb{L}^1$  ». L'ensemble  $\mathbb{L}^2$  est un sev de  $\mathcal{C}^{\text{pm}}(I, \mathbb{K})$ , inégalité de Cauchy Schwarz,  $\|\cdot\|_2$  est une norme sur  $\mathbb{L}_c^2$ .

## 3 Exercices de TD à savoir refaire

TD 8 : 2, 5, 8 (cours), 15, 16, 17, 19, 21 TD 9 : 1, 8 (cours). Les exercices 4, 5, 11 seront corrigés lundi.