Année 2023/24

Khôlle n° 14
semaine du 22 janvier

En souligné : démonstration de cours à savoir refaire.

1 Limites et continuité dans les espaces normés

Les exercices, notamment le calcul de $|||f|||$ si $f \in \mathscr{L}_c(\mathrm{E},\mathrm{F})$.

2 Intégrales généralisées à un intervalle quelconque

• Fonctions continues par morceaux sur un segment (rappels de Sup), puis sur un intervalle quelconque. Espace $\mathscr{C}^{\mathrm{pm}}(\mathrm{I},\mathbb{K})$, stable par $\times$ mais pas par $\circ$ (contre-exemple à savoir énoncer).

• Construction de l'intégrale des fonctions cpm sur un segment (rappels de Sup) : savoir expliquer les étapes. Propriétés de l'intégrale. Sommes de Riemann (sur une subdivision pointée (σ,ξ)), cas des subdivisions régulières, théorème des sommes de Riemann pour les subdivisions régulières.

• Étude de la fonction de Newton $\mathrm{A}_a : x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$. Croissance si f est positive. Continuité si f est cpm. Classe $\mathscr{C}^1$ si f est continue (théorème fondamental du Calcul intégral/de l'Analyse). Existence de primitives pour les fonctions continues sur un intervalle, formule $\int_a^b f = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$. Intégration par parties, changement de variable (cas où f est continue, puis cas admis où f est cpm avec une hypothèse supplémentaire sur le changement de variable).

• Intégrales généralisées sur $[a,b[$. Exemples de référence : $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x$, $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$, $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$, $\int_0^1 \ln(x)\mathrm{d}x$. Exemple de fonction continue positive d'intégrale convergente sur $[0,+\infty[$ mais qui ne tend pas vers 0 en $+\infty$. Si f a une limite ℓ en $+\infty$ et si $\int_a^{+\infty} f$ converge, alors $\ell = 0$.

• Intégrales généralisées sur $]a,b[$. Exemples de référence : $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$, $\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

• Intégrales faussement généralisées (présence d'un prolongement par continuité) : savoir expliquer pourquoi elles convergent. Relations de comparaison $\leqslant$, o, O, $\sim$) concernant les IFP (intégrales de fonctions positives), exemple de référence : inétgrale de Gauss $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

• Intégration par parties et changement de variables adaptés aux intégrales généralisées.

• Intégrales absolument convergentes : elles convergent. Intégrale semi-convergente, exemple de référence : inétgrale de Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x$. Fonctions intégrables. Adaptation des règles de comparaison aux fonctions intégrables.

• Espaces de Lebesgue $\mathbb{L}^1_{\mathrm{cpm}}(\mathrm{I},\mathbb{K})$ et $\mathbb{L}^2_{\mathrm{cpm}}(\mathrm{I},\mathbb{K})$. L'ensemble $\mathbb{L}^1$ est un sev de $\mathscr{C}^{\mathrm{cpm}}(\mathrm{I},\mathbb{K})$, $\|\cdot\|_1$ est une semi-norme, et c'est une norme sur $\mathbb{L}^1_{\mathrm{c}}(\mathrm{I},\mathbb{K})$. Lemme « $\mathbb{L}^2\mathbb{L}^2 \subset \mathbb{L}^1$ ». L'ensemble $\mathbb{L}^2$ est un sev de $\mathscr{C}^{\mathrm{pm}}(\mathrm{I},\mathbb{K})$, inégalité de Cauchy Schwarz, $\|\cdot\|_2$ est une semi-norme, et c'est une norme sur $\mathbb{L}^2_{\mathrm{c}}$.

3 Exercices de TD à savoir refaire

$\boxed{\text{TD 8}}$: 2, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 18. $\boxed{\text{TD 9}}$: 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9.