Année 2024/25

Khôlle n° 13
semaine du 20 janvier

1 Limites et continuité dans les espaces normés

• Si $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est continue, et si U est un ouvert de F et A un fermé de F, alors $f^{-1}\langle \mathrm{U}\rangle$ est un ouvert de E et $f^{-1}\langle \mathrm{A}\rangle$ est un fermé de E. Application à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$. Cas particulier des ensembles définis par une relation du type $f(x) \leqslant a$ ou $f(x) = a$, etc.• Théorème des bornes atteintes (admis) pour les fonctions définie sur une partie fermée-bornée d'un EVN de dimension finie à valeurs dans $\mathbb{R}$.

• Fonctions lipschitziennes. Interprétation graphique si $\mathrm{E} = \mathrm{F} = \mathbb{R}$. Somme et composée de fonctions lipschitziennes. Toute fonction lipschitzienne est continue, mais la réciproque est fausse. Dans un EVN, la fonction norme est continue. Toute fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un segment est lipschitzienne.

• Continuité des applications linéaires : 5 assertions équivalentes. La meilleure constante de Lipschitz est $\sup\limits_{x\neq 0_\mathrm{E}} \frac{\|f(x)\|_\mathrm{F}}{\|x\|_\mathrm{E}}$, on la note $|||f|||$. L'espace $\mathscr{L}_c(\mathrm{E},\mathrm{F})$ est normé par $|||\cdot|||$. Si $\mathrm{E} = \mathrm{F}$, $|||\cdot|||$ est une norme sous-multiplicative. Si E est de dimension finie, $\mathscr{L}_c(\mathrm{E},\mathrm{F}) = \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. Exemple à savoir refaire : $f \mapsto f(0)$ est continue si $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ est muni de $\|\cdot\|_\infty$ mais non continue s'il est muni de $\|\cdot\|_1$.

• Applications multilinéaires. Critère (de Lipschitz) de continuité. Exemple du produit scalaire.

• Applications polynomiales de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}$. Elles sont continues.

• Application au groupe orthogonal $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. C'est une partie de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ stable par $\times$ et par passage à l'inverse. Si $\mathrm{M} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, alors $\det(\mathrm{M}) = \pm 1$ et $\mathrm{Sp}_\mathbb{C}(\mathrm{M}) \subset \mathbb{U}$ (donc $\mathrm{Sp}_\mathbb{R}(\mathrm{M}) \subset -1, 1)$. Une matrice carrée est dans $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ ssi ses colonnes forment une BON de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. De plus, $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée et bornée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2 Intégrales généralisées (cours seulement)

• Fonctions continues sur un segment, sur un intervalle quelconque. Savoir donner deux fonctions continues par morceaux dont la composée ne l'est pas. Fonctions en escalier, proto-intégrales de ces fonctions notée $\hat{\int}_{[a,b]}$.

• Construction de l'intégrale au sens de Riemann : savoir expliquer les étapes. Les fonctions continues par morceaux sur un segment admet une intégrale au sens de Riemann mais pas l'indicatrice de $\mathbb{Q}$ sur $[0,1]$. Propriétés de l'intégrale. Théorème de la valeur moyenne.

• Sommes de Riemann (sur une subdivision pointée (σ,ξ)), cas des subdivisions régulières, théorème des sommes de Riemann pour les subdivisions régulières.

• Étude de la fonction de Newton $\mathrm{N}_a : x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$. Croissance si f est positive. Continuité si f est cpm. Classe $\mathscr{C}^1$ si f est continue (théorème fondamental du Calcul intégral/de l'Analyse). Existence de primitives pour les fonctions continues sur un intervalle, formule $\int_a^b f = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$. Intégration par parties, changement de variable (cas où f est continue, puis cas admis où f est cpm avec une hypothèse supplémentaire sur le changement de variable).

• Intégrales généralisées sur $[a,b[$. Exemples de référence : $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x$, $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$, $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$, $\int_0^1 \ln(x)\mathrm{d}x$. Exemple de fonction continue positive d'intégrale convergente sur $[0,+\infty[$ mais qui ne tend pas vers 0 en $+\infty$.

• Intégrales généralisées sur $]a,b[$. Exemples de référence : $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$, $\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$.

3 Exercices de TD à savoir refaire

$\boxed{\text{TD 8}}$ 1, 2, 4, 6, 7, 8, 10, 16