



1 Réduction : exercices uniquement

2 Limites et continuité dans les EVN

• Limite en un point suivant une partie, unicité de la limite, limite d'une combinaison linéaire, d'une composée. Caractérisation séquentielle des limites.

• Continuité en un point, sur une partie. Il est en général faux de dire « f est continue sur A quand elle est continue en tout point de A » : exemple de $\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}$. Espace $\mathcal{C}(A, F)$. L'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ est continue (admis).

• Si $f : E \rightarrow F$ est continue, et si U est un ouvert de F et A un fermé de F , alors $f^{-1}\langle U \rangle$ est un ouvert de E et $f^{-1}\langle A \rangle$ est un fermé de E .

• Théorème des bornes atteintes (admis) pour les fonctions définies sur une partie fermée-bornée d'un EVN de dimension finie à valeurs dans $\mathbb{R}$.

• Fonctions lipschitziennes. Toute fonction lipschitzienne est continue. Dans un EVN, la fonction norme est continue. Toute fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment, à valeurs dans $\mathbb{C}$, est lipschitzienne. Savoir donner des exemples de fonctions continues non lipschitziennes.

• Continuité des applications linéaires : 5 assertions équivalentes. La meilleure constante de Lipschitz est $\sup_{x \neq 0_E} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$, on la note $\|f\|$. Si E est de dimension finie, $\mathcal{L}_c(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$. Exemple vu en cours à savoir refaire : $f \mapsto f(0)$ est continue si $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ est muni de $\|\cdot\|_\infty$ mais non continue s'il est muni de $\|\cdot\|_1$.

• Applications multilinéaires. Critère de Lipschitz pour leur continuité. Exemple du produit scalaire. En dimension finie, toutes les applications multilinéaires sont continues.

• Applications polynomiales de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}$. Elles sont continues. Exemple du déterminant. Expression d'une fonction polynomiale de degré 2 sous la forme $X^\top S X + L X + c$.

• Le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$: c'est un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$. Dire $A \in O_n(\mathbb{R})$ c'est dire que les colonnes de A forment une BON de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. L'ensemble $O_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée et bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3 Exercices de TD à savoir refaire

TD 7 : 1, 2, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 14, 15, 16, 17, 20, 21, 22. TD 8 : 2, 5, 8 (cours).