Khôlle n° 13
semaine du 13 janvier

En souligné : démonstration de cours à savoir refaire.

1 Réduction (partie 1)

Les exercices.

2 Limites et continuité dans les espaces normés

• Limite en un point suivant une partie, unicité de la limite, limite d'une combinaison linéaire, d'une composée. Caractérisation séquentielle des limites. Indépendance par rapport au choix des normes en dimension finie.

• Continuité en un point, sur une partie. Il est faux de dire « f est continue sur D quand elle est continue en tout point de D» : exemple de $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$ qui est continue sur $\mathbb{R}_+$ mais pas en 0. Espace $\mathscr{C}(\mathrm{D},\mathrm{F})$. L'application $\det : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est continue.

• Si $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est continue, et si U est un ouvert de F et A un fermé de F, alors $f^{-1}\langle \mathrm{U} \rangle$ est un ouvert de E et $f^{-1}\langle \mathrm{A} \rangle$ est un fermé de E. Application à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$. Cas particulier des ensembles définis par une relation du type $f(x) \leqslant a$ ou $f(x) = a$, etc.

• Théorème des bornes atteintes (admis) pour les fonctions définie sur une partie fermée-bornée d'un EVN de dimension finie à valeurs dans $\mathbb{R}$.

• Fonctions lipschitziennes. Interprétation graphique si $\mathrm{E} = \mathrm{F} = \mathbb{R}$. Somme et composée de fonctions lipschitziennes. Toute fonction lipschitzienne est continue, mais la réciproque est fausse. Dans un EVN, la fonction norme est continue. Toute fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un segment est lipschitzienne.

• Continuité des applications linéaires : 5 assertions équivalentes. La meilleure constante de Lipschitz est $\sup\limits_{x \neq 0_{\mathrm{E}}} \frac{\|f(x)\|_{\mathrm{F}}}{\|x\|_{\mathrm{E}}}$, on la note $|||f|||$. Espace $\mathscr{L}_c(\mathrm{E},\mathrm{F})$. Si E est de dimension finie, $\mathscr{L}_c(\mathrm{E},\mathrm{F}) = \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. Exemple vu en cours : $f \mapsto f(0)$ est continue si $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ est muni de $\|\cdot\|_\infty$ mais non continue s'il est muni de $\|\cdot\|_1$.

• Applications multilinéaires. Critère (de Lipschitz) de continuité. Exemple du produit scalaire.

• Applications polynomiales de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}$. Elles sont continues.

• Application au groupe orthogonal $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$: c'est une partie fermée-bornée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

3 Exercices de TD à savoir refaire

$\boxed{\text{TD 7}}$ 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 14, 15, 16, 17, 20, 21, 22, 24 $\boxed{\text{TD 8}}$: 2, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14.