



En souligné : démonstration de cours à savoir refaire.

## 1 Réduction (partie 1)

- Valeur propre d'un endomorphisme, vecteur propre, sous-espaces propres. En dimension finie, l'ensemble des valeurs propres s'appelle le spectre. Notations  $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$ ,  $E_{\lambda}(u)$ .

- Si  $u$  et  $v$  commutent, tout sous-espace propre de l'un est stable par l'autre. Des sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont toujours en somme directe. Toute famille (finie ou non) de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre. Application à la famille  $(x \mapsto e^{ax})_{a \in \mathbb{C}}$  de  $\mathcal{F}(\mathbb{I}, \mathbb{C})$ . Si  $E$  est de dimension finie, alors  $\forall u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $\text{Card}(\text{Sp}_{\mathbb{K}}(u)) \leq \dim(E)$ .

- Réduction des involutions linéaires :  $E = E_1 \oplus E_{-1}$  interprétation en termes de symétrie par rapport à  $E_1$  parallèlement à  $E_{-1}$ . En dimension finie : trace et déterminant. Réduction des idempotents linéaires,  $E = E_0 \oplus E_1$  interprétation en termes de projection sur  $E_1$  parallèlement à  $E_0$ , et  $E_1 = \text{Im}(p)$ . En dimension finie : trace = rang.

- Adaptation du vocabulaire pour les matrices carrées *via* l'endomorphisme canoniquement associé. Recherche du spectre (réel et complexe) de  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

- Polynôme caractéristique d'une matrice carrée  $M$  défini par  $\chi_M = \det(XI_n - M)$ , cas des matrices triangulaires. Expression en dimension 2. Cas général :  $\chi_M$  est unitaire, de degré  $n$ , le coefficient de degré  $n-1$  est  $-\text{tr}(M)$  et celui de degré 0 est  $(-1)^n \det(M)$ . Le spectre de  $M$  est exactement l'ensemble des racines de  $\chi_M$ . Expression de la trace et du déterminant si  $\chi_M$  est scindé. Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique, définition de  $\chi_u$  si  $u$  est un endomorphisme en dimension finie. Exemples des symétries, des projections.

- Savoir expliquer pourquoi remplacer  $X$  par  $M$  dans  $\det(XI_n - M)$  pose problème. Le théorème de Cayley-Hamilton est démontré en dimension 2, admis sinon. Conséquence :  $\dim \mathbb{K}[M] \leq n$ .

- Si  $F$  est stable par  $u$ , alors  $\chi_{u|_F}$  divise  $\chi_u$ .

- Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  nilpotente. Son indice de nilpotence est  $\leq n$ . Son spectre est  $\{0\}$ . Si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , la réciproque est fautive. Si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , elle est vraie.

- Endomorphisme diagonalisable, matrice carrée diagonalisable. Diagonalisabilité d'une matrice n'ayant qu'une valeur propre, cas des nilpotentes. Si  $u \in \mathcal{L}(u)$ , alors  $u$  est diagonalisable si et seulement si  $E = \bigoplus_{\lambda} E_{\lambda}$  ou encore si et seulement si  $\sum_{\lambda} \dim E_{\lambda}(u) = \dim(E)$ . Cas des matrices  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  ayant  $n$  valeurs propres distinctes.

- Pour toute valeur propre de  $u$ ,  $1 \leq \dim E_{\lambda}(u) \leq m_{\lambda}$  (multiplicité de  $\lambda$  dans  $\chi_u$ ), et  $u$  est diagonalisable si et seulement si  $\chi_u$  est scindé et  $\dim E_{\lambda}(u) = m_{\lambda}$  pour tout  $\lambda$ .

- Application aux suites récurrentes linéaires homogènes, matrice compagnon, cas où cette dernière est diagonalisable.

- Application aux systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants. Si  $(\lambda, V)$  est un élément propre de  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , alors  $t \mapsto e^{\lambda t} V$  est solution de  $X' = AX$ . Si  $A$  est diagonalisable, expression des solutions de  $X' = AX$  grâce à une base de vecteur propres. Dimension de l'ensemble des solutions.

## 2 Exercices de TD à savoir refaire

TD 7 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 14, 15, 16, 17, 20, 21, 22, 24