Année 2025/26

**Khôlle n° 12**
*semaine du 12 janvier*

# 1 Réduction (partie 1)

• Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice. Distinction $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}$ / $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}$ pour les matrices uniquement.

• Si $u \circ v = v \circ u$, tout sev propre de l'un est stable par l'autre. Des sev propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe , toute famille (finie ou non) de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre, En dimension finie, limitation du nombre de valeurs propres.

• Réduction des symétries, trace et déterminant en dim. finie. Réduction des projections, trace = rang en dim. finie.

• Polynôme caractéristique d'une matrice carrée M : $\chi_{\mathrm{M}} = \det(\mathrm{XI}_n - \mathrm{M})$, cas des matrices triangulaires. Expression en dimension 2. Cas général : degré et coefficients de degré $n, n-1, 0$. Le spectre de M est exactement l'ensemble des racines de $\chi_{\mathrm{M}}$. Trace et déterminant de M si $\chi_{\mathrm{M}}$ est scindé. Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique, définition de $\chi_u$ si $u$ est un endomorphisme en dimension finie. Exemples des symétries, des projections.

• Savoir expliquer pourquoi remplacer X par M dans $\det(\mathrm{XI}_n - \mathrm{M})$ pose problème. Le théorème de Cayley-Hamilton est démontré en dimension 2, admis sinon. Conséquence : $\dim \mathbb{K}[\mathrm{M}] \leqslant n$.

• Si F est stable par $u$, alors $\chi_{u_{\mathrm{F}}}$ divise $\chi_u$.

• Majoration de l'indice de nilpotence. Le spectre d'une nilpotente est $\{0\}$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la réciproque est fausse. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, elle est vraie.

• Endomorphisme/matrice carrée diagonalisable. Diagonalisabilité d'une matrice n'ayant qu'une valeur propre, cas des nilpotentes. Si $u \in \mathscr{L}(u)$, alors $u$ est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{E} = \bigoplus_{\lambda} \mathrm{E}_\lambda$ ou encore si et seulement si $\sum_{\lambda} \dim \mathrm{E}_\lambda(u) = \dim(\mathrm{E})$. Cas des matrices M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ ayant $n$ valeurs propres distinctes.

• Pour toute valeur propre de $u$, $1 \leqslant \dim \mathrm{E}_\lambda(u) \leqslant m_\lambda$ (multiplicité de $\lambda$ dans $\chi_u$), et $u$ est diagonalisable si seulement si $\chi_u$ est scindé et $\dim \mathrm{E}_\lambda(u) = m_\lambda$ pour tout $\lambda$.

• Application aux suites récurrentes linéaires et aux systèmes différentiels.

# 2 Limites et continuité dans les EVN (cours uniquement)

• Limite en un point suivant une partie, unicité de la limite, limite d'une combinaison linéaire, d'une composée. Caractérisation séquentielle des limites.

• Continuité en un point, sur une partie. Il est en général faux de dire « $f$ est continue sur A quand elle est continue en tout point de A» : exemple de $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$. Espace $\mathscr{C}(\mathrm{A}, \mathrm{F})$. L'application $\det : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est continue (admis).

• Si $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est continue, et si U est un ouvert de F et A un fermé de F, alors $f^{-1}\langle \mathrm{U} \rangle$ est un ouvert de E et $f^{-1}\langle \mathrm{A} \rangle$ est un fermé de E.

• Théorème des bornes atteintes (admis) pour les fonctions définie sur une partie fermée-bornée d'un EVN de dimension finie à valeurs dans $\mathbb{R}$.

• Fonctions lipschitziennes. Toute fonction lipschitzienne est continue. Dans un EVN, la fonction norme est continue.

# 3 Exercices de TD à savoir refaire

$\boxed{\text{TD 7}}$ : 1, 2, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 14.