Année 2024/25

**Khôlle n° 11**
*semaine du 6 janvier*

*En souligné : démonstration de cours à savoir refaire.*

# 1 Réduction

• Valeur propre d'un endomorphisme, vecteur propre, sous-espaces propres. En dimension finie, l'ensemble des valeurs propres s'appelle le spectre. Notations $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$, $\mathrm{E}_\lambda(u)$.

• Si $u$ et $v$ commutent, tout sous-espace propre de l'un est stable par l'autre. Des sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont toujours en somme directe. Toute famille (finie ou non) de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre. Si E est de dimension finie, alors $\forall u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}),\ \mathrm{Card}(\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)) \leqslant \dim(\mathrm{E})$.

• Réduction des involutions linéaires : $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_{-1}$ interprétation en termes de symétrie par rapport à $\mathrm{E}_1$ parallèlement à $\mathrm{E}_{-1}$. En dimension finie : trace et déterminant. Réduction des idempotents linéaires, $\mathrm{E} = \mathrm{E}_0 \oplus \mathrm{E}_1$ interprétation en termes de projection sur $\mathrm{E}_1$ parallèlement à $\mathrm{E}_0$, et $\mathrm{E}_1 = \mathrm{Im}(p)$. En dimension finie : trace = rang.

• Adaptation du vocabulaire pour les matrices carrées *via* l'endomorphisme canoniquement associé.

• Polynôme caractéristique d'une matrice carrée M défini par $\chi_\mathrm{M} = \det(\mathrm{XI}_n - \mathrm{M})$, cas des matrices triangulaires. Expression en dimension 2. Cas général : $\chi_\mathrm{M}$ est unitaire, de degré $n$, le coefficient de degré $n-1$ est $-\mathrm{tr}(\mathrm{M})$ et celui de degré 0 est $(-1)^n \det(\mathrm{M})$. Le spectre de M est exactement l'ensemble des racines de $\chi_\mathrm{M}$. Expression de la trace et du déterminant si $\chi_\mathrm{M}$ est scindé. Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique, définition de $\chi_u$ si $u$ est un endomorphisme en dimension finie. Exemples des symétries, des projections.

• Savoir expliquer pourquoi remplacer X par M dans $\det(\mathrm{XI}_n - \mathrm{M})$ pose problème. Le théorème de Cayley-Hamilton est démontré en dimension 2, admis sinon. Conséquence : $\dim \mathbb{K}[\mathrm{M}] \leqslant n$.

• Si F est stable par $u$, alors $\chi_{u_\mathrm{F}}$ divise $\chi_u$.

• Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente. Son indice de nilpotence est $\leqslant n$. Son spectre est $\{0\}$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la réciproque est fausse. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, elle est vraie.

• Endomorphisme diagonalisable, matrice carrée diagonalisable. Diagonalisabilité d'une matrice n'ayant qu'une valeur propre, cas des nilpotentes. Si $u \in \mathscr{L}(u)$, alors $u$ est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{E} = \bigoplus\limits_{\lambda} \mathrm{E}_\lambda$ ou encore si et seulement si $\sum\limits_{\lambda} \dim \mathrm{E}_\lambda(u) = \dim(\mathrm{E})$. Cas des matrices $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ ayant $n$ valeurs propres distinctes.

• Pour toute valeur propre de $u$, $1 \leqslant \dim \mathrm{E}_\lambda(u) \leqslant m_\lambda$ (multiplicité de $\lambda$ dans $\chi_u$), et $u$ est diagonalisable si seulement si $\chi_u$ est scindé et $\dim \mathrm{E}_\lambda(u) = m_\lambda$ pour tout $\lambda$.

• Application aux suites récurrentes linéaires homogènes, matrice compagnon, cas où cette dernière est diagonalisable.

• Application aux systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants. Vu en TD : Si $(\lambda, \mathrm{V})$ est un élément propre de $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors $t \mapsto e^{\lambda t}\mathrm{V}$ est solution de $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$. Si A est diagonalisable, expression des solutions de $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$ grâce à une base de vecteur propres.

# 2 Exercices de TD à savoir refaire

$\boxed{\text{TD 7}}$ 1, 2, 3, 7, 8, 9, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22.