Année 2025/26

Khôlle n° 11
semaine du 5 janvier

1 Espaces vectoriels normés

• Points intérieurs à une partie, notation $\mathring{A}$. Propriétés faciles : $\mathring{A} \subset A$ et $A \subset B \Longrightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$. Parties ouvertes (quand $\mathring{A} = A$), topologie d'un EVN. Les boules ouvertes sont des parties ouvertes. Stabilité par réunion quelconque et par réunion finie. Non-stabilité par intersection quelconque.

• Points adhérents à une partie, notation $\overline{A}$. Propriétés faciles : $A \subset \overline{A}$ et $A \subset B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$. Parties fermées (quand $\overline{A} = A$). Les fermés sont exactement les complémentaires des ouverts. Stabilité par réunion finie et intersection quelconque. Les boules fermées (et donc les singletons, et donc les parties finies) sont des fermés. Caractérisation séquentielle de l'adhérence, les fermés sont exactement les parties stables par passage à la limite. Si $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ n'est pas une partie fermée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ Frontière (ou bord) ∂A d'une partie.

• Parties denses. Dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ (pour n'importe quelle norme !).

• Notion de voisinage d'un point, définition de la convergence des suites par les voisinages.

2 Réduction (partie 1)

• Valeur propre d'un endomorphisme, vecteur propre, sous-espaces propres. En dimension finie, l'ensemble des valeurs propres s'appelle le spectre. Notations $\mathrm{Sp}(u)$, $\mathrm{E}_\lambda(u)$. Adaptation du vocabulaire pour les matrices carrées.

• Si $u \circ v = v \circ u$, tout sev proprw de l'un est stable par l'autre. Des sev propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe , toute famille (finie ou non) de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre, En dimension finie, limitation du nombre de valeurs prorpes.

• Réduction des symétries, trace et déterminant en dim. finie. Réduction des projections, trace = rang en dim. finie.

• Polynôme caractéristique d'une matrice carrée M : $\chi_M = \det(XI_n - M)$, cas des matrices triangulaires. Expression en dimension 2. Cas général : χ_M est unitaire, de degré n, le coefficient de degré $n-1$ est $-\mathrm{tr}(M)$ et celui de degré 0 est $(-1)^n \det(M)$. Le spectre de M est exactement l'ensemble des racines de χ_M. Trace et déterminant de M si χ_M est scindé. Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique, définition de χ_u si u est un endomorphisme en dimension finie. Exemples des symétries, des projections.

• Savoir expliquer pourquoi remplacer X par M dans $\det(XI_n - M)$ pose problème. Le théorème de Cayley-Hamilton est démontré en dimension 2, admis sinon. Conséquence : $\dim \mathbb{K}[M] \leqslant n$.

• Si F est stable par u, alors χ_{u_F} divise χ_u.

• Majoration de l'indice de nilpotence. Le spectre d'une nipotente est $\{0\}$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la réciproque est fausse. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, elle est vraie.

• Endomorphisme/matrice carrée diagonalisable. Diagonalisabilité d'une matrice n'ayant qu'une valeur propre, cas des nilpotentes. Si $u \in \mathscr{L}(u)$, alors u est diagonalisable si et seulement si $E = \bigoplus_\lambda E_\lambda$ ou encore si et seulement si $\sum_\lambda \dim E_\lambda(u) = \dim(E)$. Cas des matrices M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ ayant n valeurs propres distinctes.

• Pour toute valeur propre de u, $1 \leqslant \dim E_\lambda(u) \leqslant m_\lambda$ (multiplicité de λ dans χ_u), et u est diagonalisable si seulement si χ_u est scindé et $\dim E_\lambda(u) = m_\lambda$ pour tout λ.

3 Exercices de TD à savoir refaire

$\boxed{\text{TD 6}}$: 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13 (q4 seulement) $\boxed{\text{TD 7}}$: 1, 8, 9, 10