Année 2024/25

Khôlle n° 10

semaine du 9 décembre

1 Espaces vectoriels normés

• Normes sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Normes 1, 2, ∞ sur $\mathbb{R}^n$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne l'inégalité triangulaire de la norme 2 sur $\mathbb{R}^n$. Expression de la norme 2 sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ au moyen de la trace. Généralisation à $\mathbb{C}^n$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ et $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{C})$.

• Distance sur un ensemble, espace métrique, $(x,y)\mapsto \|x-y\|$ est une distance, notion de boule ouverte/fermée. Boule unité de $\mathbb{R}^2$ pour les trois normes usuelles : savoir tracer la boule pour $\|\cdot\|_1$ Convexité des boules dans un EVN. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ n'est pas convexe.

• Parties bornées, propriétés (inclusion, singletons, réunion finie, parties finies), les boules sont bornées. Suites bornées. Fonctions bornées. L'espace $\mathscr{B}(\mathrm{X},\mathrm{E})$ est muni de la norme $\|\cdot\|_{\infty,\mathrm{X}}$. Notation ℓ^∞ si $\mathrm{X}=\mathbb{N}$.

• Les normes de $\mathbb{R}$ sont de la forme $\alpha|\cdot|$ avec $\alpha>0$. Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel qui possède une base possède des normes, en particulier un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie possède des normes. Il est équivalent de dire que les normes N et N′ définissent les mêmes parties bornées ou de dire qu'il existe $a,b>0$ tels que $a\mathrm{N}\leqslant \mathrm{N}'\leqslant b\mathrm{N}$. Notion de normes équivalentes. Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes dans $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ (regarder la suite $(x\mapsto nx^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$). Théorème admis : sur un même espace de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. Savoir montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ (si $n\geqslant 1$) ou $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ (si $n\geqslant 2$) ne sont pas bornées (pour n'importe quelle norme).

• Suites convergentes dans un espace normé. Lemme de séparation de deux points distincts, unicité de la limite. Toute suite convergente est bornée. Combinaison linéaire de suites convergentes. Notion de suite extraite (ou sous-suite), limite d'une suite extraite. Cas où (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite. La suite $(x\mapsto x^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente dans $(\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}),\|\cdot\|_1)$ mais pas dans $(\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty)$.

• Suites convergentes dans un espace normé de dimension finie. Si deux normes sont équivalentes, elles définissent les mêmes suites convergentes. En dimension finie, la notion de suite convergente ne dépend pas du choix d'une norme. Caractérisation par les coordonnées dans une base (en dim. finie).

• Points intérieurs à une partie, notation $\mathring{\mathrm{A}}$. Propriétés faciles : $\mathring{\mathrm{A}}\subset \mathrm{A}$ et $\mathrm{A}\subset\mathrm{B}\Longrightarrow \mathring{\mathrm{A}}\subset\mathring{\mathrm{B}}$. Parties ouvertes (quand $\mathring{\mathrm{A}}=\mathrm{A}$). Les boules ouvertes sont des parties ouvertes. Propriété fondamentale des parties ouvertes : stabilité par réunion quelconque et par réunion finie, topologie sur un ensemble. Non stabilité par intersection quelconque.

• Points adhérents à une partie, notation $\overline{\mathrm{A}}$. Propriétés faciles : $\mathrm{A}\subset\overline{\mathrm{A}}$ et $\mathrm{A}\subset\mathrm{B}\Longrightarrow\overline{\mathrm{A}}\subset\overline{\mathrm{B}}$. Parties fermées (quand $\overline{\mathrm{A}}=\mathrm{A}$). Les fermés sont exactement les complémentaires des ouverts. Stabilité par réunion finie et intersection quelconque. Les boules fermées (et donc les singletons, et donc les parties finies) sont des fermés. Caractérisation séquentielle de l'adhérence, les fermés sont exactement les parties stables par passage à la limite. Si $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ n'est pas une partie fermée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ mais c'en est un ouvert et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ n'en est pas une partie ouverte mais c'en est un fermé. Frontière (ou bord) $\partial\mathrm{A}$ d'une partie.

• Parties denses. Dans $(\mathbb{R},|\cdot|)$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ sont denses. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ (pour n'importe quelle norme !).

• Notion de voisinage d'un point, définition de la convergence des suites par les voisinages.

2 Exercices de TD à savoir refaire

$\boxed{\text{TD 6}}$ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13.