Année 2025/26

Khôlle n° 10
semaine du 8 décembre

En souligné : démonstration de cours à savoir refaire.

1 Algèbre linéaire (partie 2)

• Deux matrices semblables ont même déterminant : savoir expliquer pourquoi on peut définir le déterminant d'un endomorphisme en dimension finie (non nulle).

• Déterminant d'un système de n vecteurs dans un $\mathbb{K}$-ev de dimension n. Propriétés. Interprétation géométrique : si $n = 2$, $|\det_{\mathscr{B}}(x_1, x_2)|$ est l'aire d'un parallélogramme, généralisation. Si f est un endomorphisme, formule $\det_{\mathscr{B}}(f(x_1), \dots, f(x_n)) = \det(f) \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n)$. Relation « est orientée comme » sur l'ensemble des bases d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. C'est une relation d'équivalence n'ayant que deux classes d'équivalence. Notion d'orientation, d'espace orienté, de base directe. Orientation d'un plan dans $\mathbb{R}^3$ muni de son orientation canonique.

2 Espaces vectoriels normés

• Normes sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Normes 1, 2, ∞ sur $\mathbb{R}^n$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne l'inégalité triangulaire de la norme 2 sur $\mathbb{R}^n$. Expression de la norme 2 sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ au moyen de la trace. Généralisation à $\mathbb{C}^n$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ et $\mathscr{C}([a, b], \mathbb{C})$.

• Distance sur un ensemble, espace métrique, $(x, y) \mapsto \|x - y\|$ est une distance, notion de boule ouverte/fermée. Boule unité de $\mathbb{R}^2$ pour les trois normes usuelles : savoir tracer la boule pour $\|\cdot\|_1$. Convexité des boules dans un EVN. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ n'est pas convexe.

• Parties bornées, suites bornées, fonctions bornées. Savoir montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas borné dans $(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$. L'ensemble $\mathscr{B}(\mathrm{X}, \mathrm{E})$ des fonctions bornées de X dans un EVN $(\mathrm{E}, \|\cdot\|)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathrm{X}, \mathrm{E})$, l'application $f \mapsto \sup\limits_{x \in \mathrm{X}} \|f(x)\|$ en est une norme. Notation ℓ^∞ si $\mathrm{X} = \mathbb{N}$.

• Les normes de $\mathbb{R}$ sont de la forme $\alpha|\cdot|$ avec $\alpha > 0$. Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel qui possède une base possède des normes, en particulier un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie possède des normes. Notion de normes équivalentes. Si deux normes sont équivalentes, elles définissent les mêmes parties bornées. Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes sur $\mathbb{R}^n$, les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes sur $\mathscr{C}([0, 1], \mathbb{R})$.

• Suites dans un EVN. Notion de suites convergentes, unicité de la limite, linéarité de la limite, toute suite convergente est bornée, caractérisation par (u_{2n}) et (u_{2n+1}). Deux normes équivalentes donnent les mêmes suites convergentes (avec les mêmes limites). Caractérisation par les coordonnées en dimension finie.

3 Exercices de TD à savoir refaire

$\boxed{\text{TD 5}}$: 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11 (fait en cours), 22, 23, 26 $\boxed{\text{TD 6}}$: 1, 2, 3.