Année 2024/25

Khôlle n° 9
semaine du 2 décembre

En souligné : démonstration de cours à savoir refaire.

1 Algèbre linéaire (partie 2)

• Déterminants d'une matrice carrée : il existe une unique application $\det : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ qui soit linéaire par rapport aux colonnes de sa variable matricielle, telle que $\det(\mathrm{M}) = 0$ dès que M a deux colonnes égales et telle que $\det(\mathrm{I}_n) = 1$. Démonstration pour $n = 2$. Invariance par transposition, par transvection $\mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_i + \alpha \mathrm{L}_j$ $(i \neq j)$, $\det(\lambda \mathrm{A})$, $\det(\mathrm{AB})$, caractérisation des matrices inversibles, $\det(\mathrm{A}^{-1})$. Développement par rapport à une rangée (formule de Laplace), déterminant triangulaire et triangulaire par blocs.

• Déterminant de Vandermonde $\mathscr{V}(x_0, \ldots x_n)$ et lien avec la théorie des polynômes interpolateur : c'est la matrice de $\mathrm{P} \mapsto (\mathrm{P}(x_0), \ldots, \mathrm{P}(x_n))$, définie sur $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$. Elle est inversible si et seulement si les $x_0, \ldots, x_n$ sont deux à deux distincts. Déterminant de Vandermonde.

2 Exercices de TD à savoir refaire

3 Espaces vectoriels normés

• Normes sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Normes 1, 2, ∞ sur $\mathbb{R}^n$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne l'inégalité triangulaire de la norme 2 sur $\mathbb{R}^n$. Expression de la norme 2 sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ au moyen de la trace. Généralisation à $\mathbb{C}^n$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ et $\mathscr{C}([a, b], \mathbb{C})$.

• Distance sur un ensemble, espace métrique, $(x, y) \mapsto \|x - y\|$ est une distance, notion de boule ouverte/fermée. Boule unité de $\mathbb{R}^2$ pour les trois normes usuelles : savoir tracer la boule pour $\|\cdot\|_1$ Convexité des boules dans un EVN. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ n'est pas convexe.

• Parties bornées, propriétés (inclusion, singletons, réunion finie, parties finies), les boules sont bornées. Suites bornées. Fonctions bornées. L'espace $\mathscr{B}(\mathrm{X}, \mathrm{E})$ est muni de la norme $\|\cdot\|_{\infty,\mathrm{X}}$. Notation ℓ^∞ si $\mathrm{X} = \mathbb{N}$.

• Les normes de $\mathbb{R}$ sont de la forme $\alpha|\cdot|$ avec $\alpha > 0$. Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel qui possède une base possède des normes, en particulier un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie possède des normes. Il est équivalent de dire que les normes N et N′ définissent les mêmes parties bornées ou de dire qu'il existe $a, b > 0$ tels que $a\mathrm{N} \leqslant \mathrm{N}' \leqslant b\mathrm{N}$. Notion de normes équivalentes. Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes dans $\mathscr{C}([0, 1], \mathbb{R})$ (regarder la suite $(x \mapsto nx^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$).

4 Exercices de TD à savoir refaire

$\boxed{\text{TD 5}}$: 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 15. $\boxed{\text{TD 6}}$ 1, 2, 3, 4, 5.