Année 2023/24

Khôlle n° 9
semaine du 27 novembre

En souligné : démonstration de cours à savoir refaire.

1 Suppléments pour la Physique

• Opérateurs divergence, rotationnel et laplacien. Relations $\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{F}})) = 0$ et $\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{grad} f}) = \overrightarrow{0}$. Déterminant jacobien des changments polaires, cylindriques et sphériques.

• Intégrales multiples, théorème de Fubini, théorème de changement de variables.

2 Algèbre linéaire (partie 2)

• Polynômes de matrices/d'endomorphismes. Sous-espaces $\mathbb{K}[\mathrm{M}]$ et $\mathbb{K}[u]$. Relation $\mathrm{PQ}(\mathrm{M}) = \mathrm{P}(\mathrm{M}) \times \mathrm{Q}(\mathrm{M})$ et $\mathrm{PQ}(u) = \mathrm{P}(u) \circ \mathrm{Q}(u)$. Les éléments de $\mathbb{K}[\mathrm{M}]$ (resp. de $\mathbb{K}[u]$) commutent entre eux.

• Polynôme annulateur de M (resp. u). Exemples des symétries, projecteurs, homothéties, nilpotents. Toute matrice carrée admet un polynôme annulateur (non nul). Idem pour les endomorphismes en dimension finie. La dérivation de $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ n'admet pas de polynôme annulateur non nul.

• Si $\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{M}^{-1} \in \mathbb{K}[\mathrm{M}]$. Calcul de M^k grâce au reste de la division euclidienne de X^k par un polynôme annulateur de M. Si P est un polynôme annulateur non nul d'une matrice carrée M, alors $\dim \mathbb{K}[\mathrm{M}] \leqslant \deg(\mathrm{P})$.

• Sous-espaces stables par un endomorphisme. Endomorphisme induit, Caractérisation matricielle de l'existence d'un sous-espace stable. Si u et v commutent, alors $\operatorname{Ker}(v)$ et $\operatorname{Im}(v)$ sont u-stables. En particulier, $\operatorname{Ker}(\mathrm{P}(u))$ et $\operatorname{Im}(\mathrm{P}(u))$ sont u-stables pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$.

• Formes linéaires sur un espace vectoriel. Rappels sur l'espace dual E^* et sa dimension si E est de dimension finie. Base duale de E^* associée à une base de E. Une forme linéaire est soit nulle, soit surjective. Description des formes linéaires sur $\mathbb{K}^n$.

• Hyperplans (en dimension quelconque) : il est équivalent de dire qu'un sev est le noyau d'une forme linéaire non nulle ou de dire qu'il est supplémentaire d'une droite. En dimension finie, caractérisation par la dimension « $n-1$ ». Équations d'un hyperplan H dans une base (en dimension finie). Équation d'un hyperplan affine $\mathscr{H} = a + \mathrm{H}$ dans une base (en dimension finie).

• Déterminants d'une matrice carrée : il existe une unique application $\det : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ qui soit linéaire par rapport aux colonnes de sa variable matricielle, telle que $\det(\mathrm{M}) = 0$ dès que M a deux colonnes égales et telle que $\det(\mathrm{I}_n) = 1$. Démonstration pour $n = 2$. Invariance par transposition, par transvection $\mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_i + \alpha \mathrm{L}_j$ $(i \neq j)$, $\det(\lambda \mathrm{A})$, $\det(\mathrm{AB})$, caractérisation des matrices inversibles, $\det(\mathrm{A}^{-1})$. Développement par rapport à une rangée (formule de Laplace), déterminant triangulaire et triangulaire par blocs.

• Matrice de Vandermonde : c'est la matrice de $\mathrm{P} \in \mathbb{K}_n[\mathrm{X}] \mapsto (\mathrm{P}(x_0), \ldots, \mathrm{P}(x_n)) \in \mathbb{K}^{n+1}$ dans les bases canoniques. Cette matrice est inversible si et seulement si $x_0, \ldots, a_n$ sont deux à deux distincts. Déterminant de Vandermonde. Existence, unicité et expression du polynôme interpolateur de Lagrange. Savoir trouver la base duale de la base de Lagrange $(\mathrm{L}_0, \ldots, \mathrm{L}_n)$.

• Déterminant de deux matrices semblables, déterminant d'un endomorphisme en dimension finie. Propriétés.

3 Exercices de TD à savoir refaire

$\boxed{\text{TD 4}}$ 22, 23, 24, 27 $\boxed{\text{TD 5}}$ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.