Année 2025/26

Khôlle n° 9
semaine du 1er décembre

En souligné : démonstration de cours à savoir refaire.

1 Algèbre linéaire (partie 2)

• Polynômes de matrices/d'endomorphismes. Sous-espaces $\mathbb{K}[\mathrm{M}]$ et $\mathbb{K}[u]$. Relation $\mathrm{PQ}(\mathrm{M}) = \mathrm{P}(\mathrm{M}) \times \mathrm{Q}(\mathrm{M})$ et $\mathrm{PQ}(u) = \mathrm{P}(u) \circ \mathrm{Q}(u)$. Les éléments de $\mathbb{K}[\mathrm{M}]$ (resp. de $\mathbb{K}[u]$) commutent entre eux.

• Polynôme annulateur de M (resp. u). Exemples des symétries, projecteurs, homothéties, nilpotents. Toute matrice carrée admet un polynôme annulateur (non nul). Idem pour les endomorphismes en dimension finie. La dérivation de $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ n'admet pas de polynôme annulateur non nul.

• Si $\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{M}^{-1} \in \mathbb{K}[\mathrm{M}]$. Calcul de M^k grâce au reste de la division euclidienne de X^k par un polynôme annulateur de M ; si P est un polynôme annulateur non nul d'une matrice carrée M, alors $\dim \mathbb{K}[\mathrm{M}] \leqslant \deg(\mathrm{P})$.

• Sous-espaces stables par un endomorphisme. Endomorphisme induit, Caractérisation matricielle de l'existence d'un sous-espace stable. Si u et v commutent, alors $\mathrm{Ker}(v)$ et $\mathrm{Im}(v)$ sont stables par u. En particulier, $\mathrm{Ker}(\mathrm{P}(u))$ et $\mathrm{Im}(\mathrm{P}(u))$ sont stables par u pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$.

• Formes linéaires sur un espace vectoriel. Rappels sur l'espace dual E^* et sa dimension si E est de dimension finie. Base duale de E^* associée à une base de E. Une forme linéaire est soit nulle, soit surjective.

• Hyperplans (en dimension quelconque) : il est équivalent de dire qu'un sev est le noyau d'une forme linéaire non nulle ou de dire qu'il est supplémentaire d'une droite. En dimension finie, caractérisation par la dimension « $n-1$ ». Équations d'un hyperplan H dans une base (en dimension finie). Équation d'un hyperplan affine $\mathscr{H} = a + \mathrm{H}$ dans une base (en dimension finie).

• Déterminants d'une matrice carrée : il existe une unique application $\det : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ qui soit linéaire par rapport aux colonnes de sa variable matricielle, telle que $\det(\mathrm{M}) = 0$ dès que M a deux colonnes égales et telle que $\det(\mathrm{I}_n) = 1$. Démonstration pour $n = 2$. Invariance par transposition, par transvection $\mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_i + \alpha \mathrm{L}_j$ ($i \neq j$), $\det(\lambda \mathrm{A})$, $\det(\mathrm{AB})$, caractérisation des matrices inversibles, $\det(\mathrm{A}^{-1})$. Développement par rapport à une rangée (formule de Laplace), déterminant triangulaire et triangulaire par blocs.

• Déterminant de Vandermonde $\mathscr{V}(x_0, \dots x_n)$ et lien avec la théorie des polynômes interpolateur : c'est la matrice de $\mathrm{P} \mapsto (\mathrm{P}(x_0), \dots, \mathrm{P}(x_n))$, définie sur $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$. Elle est inversible si et seulement si les $x_0, \dots, x_n$ sont deux à deux distincts. Déterminant de Vandermonde : on pourra demander, au choix,

— de montrer que l'application $\mathrm{V} : t \mapsto \det \mathscr{V}(x_0, \dots x_{n-1}, t)$ est polynomiale avec un coefficient dominant à expliciter.

— d'établir la relaltion $\mathrm{D}_n = a_{n-1} \mathrm{D}_{n-1}$ avec a_{n-1} à déterminer (où D_n est le déterminant de Vandermonde).

— de trouver une expression de D_n si l'on donne la relation $\mathrm{D}_n = a_{n-1} \mathrm{D}_{n-1}$.

Base de Lagrange $(\mathrm{L}_0, \dots, \mathrm{L}_n)$ associés à $x_0, \dots, x_n$ deux à deux distincts. Expression d'un polynôme de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ dans cette base, cas du polynôme L interpolant les points (x_i, y_i).

• Deux matrices semblables ont même déterminant : savoir expliquer pourquoi on peut définir le déterminant d'un endomorphisme en dimension finie (non nulle).

• Déterminant d'un système de n vecteurs dans un $\mathbb{K}$-ev de dimension n. Propriétés. Interprétation géométrique : si $n = 2$, $|\det_{\mathscr{B}}(x_1, x_2)|$ est l'aire d'un parallélogramme, généralisation. Si f est un endomorphisme, formule $\det_{\mathscr{B}}(f(x_1), \dots, f(x_n)) = \det(f) \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n)$. Relation « est orientée comme » sur l'ensemble des bases d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. C'est une relation d'équivalence n'ayant que deux classes d'équivalence. Notion d'orientation, d'espace orienté, de base directe. Orientation d'un plan dans $\mathbb{R}^3$ muni de son orientation canonique.

2 Exercices de TD à savoir refaire

$\boxed{\text{TD 4}}$ (extrémums et EDP) : 6 (fait en cours), 10, 16. $\boxed{\text{TD 5}}$: 1, 2, 3, 4, 5, 7, 11 (fait en cours).